DOĞAYI ÖĞRENMEK: FİZİK

Zeynep Alpar (1982), lisans eğitimini 2004 yılında sosyal antropoloji alanında, yüksek lisans eğitimini ise 2009 yılında sosyoloji alanında tamamladı. Sosyal araştırmalar ve sivil toplum kuruluşlarında çalışmanın yanı sıra, İngilizce ve Türkçe dillerinde çift yönlü çeviri yapıyor.

DOĞAYI ÖĞRENMEK: FİZİK

Mehmet Ali Alpar

Çeviren: Zeynep Alpar

Genişletilmiş İkinci Basım

BOĞAZİÇİ
ÜNİVERSİTİ
YAYINEVİ

Mehmet Ali Alpar
Science of Nature: Physics
Copyright © Mehmet Ali Alpar. All rights reserved.

Doğayı Öğrenmek: Fizik
Türkçe Yayım Hakları © BÜTEK A.Ş. 2014. Tüm hakları saklıdır.
ISBN 978-605-4787-42-5

BÜTEK Boğaziçi Eğitim Turizm Teknopark Uygulama
ve Dan. Hiz. San. Tic. A.Ş.
Boğaziçi Üniversitesi Güney Kampüs, 7. Lojman,
3. Kat, P.K. 34342, Bebek-Beşiktaş/İstanbul
Telefon: 0212 359 46 30

Yönetim Yeri:
Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi
Boğaziçi Üniversitesi Uçaksavar Kampüsü
Garanti Kültür Merkezi, Arka Giriş
Etiler/İstanbul

bupress@boun.edu.tr
www.bupress.org
Telefon ve faks: (90) 212 257 87 27
Sertifika No: 10821

Genel Yayın Yönetmeni: Murat Gülsoy
Yönetici Editör: Ergun Kocabıyık
Yayıma Hazırlayanlar: Yuki Kaneko, Defne Üçer
Kapak Tasarımı: Kerem Yeğin
Kapak Fotoğrafı: Tunç Tezel.
Baskı: Acar Basım ve Cilt Sanayi Ticaret A.Ş.
Beysan San. Sitesi Birlik Cad., No: 26
Acar Binası, Haramidere/Avcılar, İstanbul
Telefon: (0212) 422 18 00 (255)
Sertifika No: 11957

Birinci Basım: Aralık 2014
Genişletilmiş İkinci Basım: Eylül 2019

İçindekiler

Önsöz 1

1 Kısa Bir Felsefî Giriş 4

2 Bilim Üzerine Birkaç Söz Daha 9

3 Bilimler Arasındaki İlişki 9

4 Bazı Temel Araçlar: Bilimsel Gisterim, Hatalar, Boyut Analizi Temel Sabitler ve Vektörler 15

4.1 Bir Dil Olarak Matematik 15

4.2 Bilimsel Gösterim ve Hatalar 16

4.3 Boyut Analizi 19

4.4 Temel Sabitler 20

4.5 Vektörler 21

4.5.1 Büyüklük 22

4.5.2 Toplama ve Çarpma 22

4.5.3 Birim Vektörler 22

4.5.4 İç Çarpım 22

4.5.5 Vektörel Çarpım 22

4.5.6 Vektörler Ne İşe Yarıyor? 22

5 Hareketi Nasıl Tanımlarız? 22

5.1 Ortalama Hız 22

5.2 *dx/dt* Nasıl Hesaplanır? 22

6 Parçacığın Nerede Olduğunu Nasıl Bulacağız? 22

7 Dairesel Hareket 143

7.1 Düzgün Dairesel Hareket 143

7.2 Düzgün Dairesel Harekette Konum, Hız ve İvme 148

8 Newton'un Hareket Kanunları 157

8.1 Bir Cisme Etki Eden Kuvvetler 157

8.2 Ağırlık Nedir? 159

8.3 Normal Kuvvetler 163

8.4 Sürtünme 166

9 Momentum 157

9.1 Çarpışmalar 157

9.2 Kütle Merkezi 159

10 Enerji 157

10.1 Korunumlu Olmayan Kuvvetler 157

10.2 Potansiyel Enerji 159

10.3 Esnek Çarpışmalar 163

11 Frenleme ve Üstel Fonksiyon 157

11.1 Hızla Orantılı Frenleme Kuvvetleri 157
11.2 Üstel Fonksiyon 159

12 Harmonik Osilatör 157

13 Açısal Momentum 157
13.1 Simetriler ve Korunum Kanunları: Noether Teoremi 157

14 Kütleçekimi ve Kepler Problemi 157

15 Ek Sorular – Mekanik 157

16 Basınç – Hacim – Sıcaklık: İdeal Gaz 157

17 Entropi ve Termodinamik Yasaları 157
17.1 Kutudaki Gaz 157
17.2 Kaçı Sağda Kaçı Solda? 159
17.3 Termodinamiğin İkinci Kanunu – Makroskobik Sistemler En Olası Duruma gider ve Öyle Kalır 163
17.4 Termodinamiğin Birinci Kanunu – Enerji Korunumu 159
17.5 Entropi ve Isı Transferi: Entropinin Termodinamikteki Karşılığı 163

18 Ek Sorular – Termodinamik 157

19 Coulomb Kanunu 157
19.1 Temel Parçacıklar, Yük Kauantumu ve Yük Birimlerimiz 157
19.2 Elektrostatik Kuvvet (Coulomb Kuvveti) 159
19.3 Elektrik Alan ve Voltaj 163

20 Gauss Kanunu 157

21 Paralel Levhalı Kapasitör 157

22 Manyetik Alanlar, Elektrik Akımları ve Ampère Kanunu 157
22.1 Manyetizme 157
22.2 Akımlar Manyetik Alanlar Oluşturur: Ampère Kanunu 159
22.3 * Akım Parçalarının Manyetik Alana Katkısı: Biot-Savart Kuralı 163
22.4 Manyetik Alanın Elektrik Akımlarına Etkisi: Lorentz Kuvveti 159

23 Elektrik ve Manyetik Dipolleri Kesmek 157

24 Değişen Elektrik Alanlar Dolanan Manyetik Alanlar Yaratır: Sürülme Akımı 157

25 Faraday'in İndüksiyon Yasası 157

26 Dalgalar ve Maxwell Denklemleri 157
26.1 Ampère-Maxwell Kanununun Uygulaması 157
26.2 Faraday Kanununun Uygulaması 159
26.3 Dalga Denklemini Bulmak 163
26.4 Elektromanyetik Dalgalar Işık Hızıyla Yayılır 159
26.5 Elektromanyetik Dalgalardan Işıyan Enerji 163

27 Devreler 157
27.1 Ohm Kanunu 157

27.2 İş, Enerji, Güç 159
27.3 Elektrik Alanda Depolanan Enerji 163
27.4 Manyetik Alanda Depolanan Enerji 159
27.5 Elektromanyetik Dalgalardaki Enerji 163

28 Ek Sorular – Elektrik ve Manyetizma 157

29 Bohr'un Hidrojen Atomu Modeli 157
29.1 Klasik Fizik: Atomlar Neden Böyle? Atomlar Nasıl Oluyor da Var Olabiliyor? 157
29.2 Bohr'un Modeli: Atomun Boyutunu Ne Belirliyor? 159

30 Dalga-Parçacık İkiliği 157
30.1 Parçacık Özellikleri 157
30.2 Dalga Özellikleri 159
30.3 Dalga ve Parçacık Özellikleri Sözlüğü 163
30.4 Parçacık Dalgası Ne Demek? 159
30.5 Schrödinger Denklemi 163
30.6 Temel Sabitler, Temel Kuvvetler ve Dalga-Parçacık İkiliği

31 Dalga Paketleri ve Belirsizlik İlişkisi 157
31.1 Dalga Paketleri 157
31.2 Belirsizlik İlişkisi 159
31.3 Sıfır Noktası Hareketi: Hiçbir Şey Sabit Olamaz 163

32 Pauli Dışlama İlkesi 157

33 Atomik Elektronlar İçin Dalga Şekilleri 157

34 Ek Sorular – Kuantum Fiziği 157

Dizin 157

Önsöz

Bu kitap Sabancı Üniversitesi'nde *Science of Nature I*/Doğa ve Bilim I adıyla, tüm öğrencilerin aldığı genel müfredatın fizik kısmı olarak 1999-2013 yılları arasında verilen derslerin notlarından oluşuyor. Kitabın ilk baskısından sonra, 2015'ten beri, aynı içeriği daha kapsamlı olarak ikinci sınıf öğrencilerine verdiğim Temel Fizik Kavramları dersinde anlatıyorum. Kitap mekanik, elektrik ve mıknatıslık, kuantum fiziği ve istatistik fizik konusunda temel fikirleri ele alıyor. Esas kavramların çoğunu kapsamak açısından bütünlüklü, konuların seçiminde ise en önemli örneklerle sınırlı kalarak seçici olmaya çalıştım. Kitap fen ve mühendislik öğrencileri için bir veya iki dönemlik bir giriş dersi, sosyal ve beşerî bilimler ve sanat öğrencileri için ileri düzeyde bir giriş dersi, daha hacimli ve ayrıntılı Fiziğe Giriş dersleri almakta olan öğrenciler ve doğa bilimlerine meraklı lise öğrencileri için ise temel kavramları vurgulayan ve birbirine bağlayan bir anahtar olarak kullanılabilir. Meraklı öğrencilerin kendi başlarına, problemleri de çözerek okuyup öğrenecekleri bir kitap olarak da işe yarayabilir. Matematik seviyesi temel türev ve integral hesabı, trigonometrik ve üstel fonksiyonları içeriyor. Bunları hiç bilmeyenler de bu kitaptan yeterli bir düzeyde öğrenebilirler, çünkü gereken matematiğin tamamı fizik konuları içinde en baştan başlayarak geliştiriliyor.

Kitabın giriş bölümleri doğa bilimlerinin felsefi temellerini basit düzeyde ele alıyor. Doğa Bilimleri aslında sağduyuya dayanır. Basit sağduyunun gerektirdiği deneyimlerden öğrenme ilkesi, bilimde çok başarılı bir usul ve yönteme dönüşmüştür. Deney ve gözleme dayanan düşünme tarzı, meslek olarak bilimle uğraşmayacak olsalar da herkes için önemli bir değerdir. Bilimin kendisi için de, uygulamalardan ve örneklerden daha öncelikli olarak, neyi nasıl, hangi deneyimlerden çıkarak, nasıl bir akıl yürütmeye dayanarak bildiğimizi anlamak esastır. Bu kitapta bütün kavramları deney ve gözlemlerle bağlantılı olarak, bir mantık sıralaması içinde sunmaya çalıştım. Ders, bilimdeki kavramların tarih içindeki gelişimlerine atıfta bulunuyor. Dersin tasarımında ve Sabancı Üniversitesi'ndeki uygulamalarında bilim ve bilim tarihiyle ilgili okuma ödevlerinin de önemli bir yeri oldu. Sabancı Üniversitesi'nde bu derse paralel olarak bilim tarihiyle ilgili popüler kitaplardan, bilimle ilgili denemelerden de okuma ödevleri veriliyordu. Bu bağlamda en çok kullandığımız kitap olan John Gribbin'in *Bilim Tarihi*,* güzel bir tesadüf eseri kitabın ilk baskısının çıktığı yıl Türkçede yayımlandı. Yine çok

* Türkçesi Barış Gönülşen, Alfa Yayınları, 2014.

kullandığımız bir diğer kitap, Richard Feynman'ın *Altı Kolay Parça*[*] kitabı da Türkçeye çevrilmiş bulunuyor.

Kitaba kaynak olan ilk dersin İngilizce ismi "*Science of Nature*" isabetli bir seçimle Sargun Tont tarafından önerilmişti. Türkçede bu ismi tam olarak karşılamak zor; doğanın bilimi/bilinmesi, doğayı öğrenmek/bilmek/anlamak gibi anlamları var. Üstelik bu kitapta sadece fizik var, diğer doğa bilimleri yok. Fizik en kapsamlı ve temel doğa yasalarını ele aldığından belki bu ismi ayrıcalıklı olarak hak ediyor. Birçok dilde fizik için kullanılan eski isim "doğa felsefesi," İngilizcedeki "*Natural Philosophy*" gibi; Osmanlıcada da "Hikmet." Sonunda "Doğayı Öğrenmek: Fizik" isminde karar kıldık.

Mekanik kısmı hareketin tasviriyle başlayarak Newton Yasalarını, enerji, momentum ve açısal momentumun korunumunu ele alıyor. Dairesel hareketteki ivmenin nasıl sırf geometriden türediğini şekillerin yardımıyla kurgulayarak "merkezkaç- merkezcil kuvvet" gibi yanıltıcı terimlerden özenle kaçındım. Sadece iki örnek ayrıntılı olarak ele alınıyor: bütün doğal ve mühendislik tasarımı sistemlerin kararlı dengeye yakın hareketlerini ilgilendirdiği için harmonik salınımlar problemi, ve bir de bilim ve düşünce tarihindeki yeri dolayısıyla Kepler problemi.

Makroskobik sistemler için anlamlı olan kavramların mikroskobik ölçekle ilişkilendirilmesi, yani "oluşum" (İngilizce *emergence*), günümüzde bilimin önemli bir vurgusudur. Bilimler arasındaki ilişkilere indirgemeci yaklaşım, yani karmaşık sistemlerin daha temel/basit düzeydeki doğa yasalarıyla anlaşılmaya çalışılması, elbette önemini koruyor. Bilimlerin bütünlüğünü kapsamak için daha basit, daha küçük ölçekli sistemlerden karmaşık sistemlere, büyük ölçeklere geçişte uygun kavramların nasıl ortaya çıktığının anlaşılması da önemli. Fizikçi P. W. Anderson'un (Nobel 1978) meşhur denemesinin başlığıyla, "Daha Çok, Daha Başkadır" (*"More is Different"*). İndirgeme ile ters yöndeki bu bakışın konusu olan oluşum, bilgisayarların güçlenmesiyle pek çok örnekte incelenebilir hale geldi. Bu kitapta basınç ve sıcaklık kavramlarının ideal gaz yasası örneğinde, atom ve moleküllere uyarlanan Newton mekaniğinden nasıl türediği oluşumun klasik bir örneği olarak ele alınıyor. Kitabın bu ikinci basımına Entropi ve Termodinamik üzerine yeni bir bölüm ilave edildi. Bu bölümde entropi Boltzmann'ın tanımıyla makroskobik durumların olasılığı üzerinden basitçe anlatılıyor, termodinamiğin ikinci kanunu da makroskobik sistemlerin en olası duruma evrileceği ve denge halinde en olası durumda kalacağı şeklinde veriliyor.

Elektrik ve Manyetizma kısmında Maxwell Denklemlerinin hepsi teker teker ele alındıktan sonra en basitinden simetrik bir örnek üzerinden elektromanyetik

---

* Türkçesi Zekeriya Aydın, Alfa Yayınları, 2013. En usta sunumla daha fazla fizik öğrenmek isteyenler üç cildi ve alıştırmaları 2016-2017'de Türkçe yayınlanmış olan Feynman'ın *Fizik Dersleri*'ne başvurabilirler.

dalga oluşumu gösteriliyor. Işık hızının temel elektrik ve mıknatıslık sabitleriyle belirlendiği ve ışığın bir elektromanyetik dalga olduğu anlaşılıyor. Kütle ve elektrik yükü taşıyan cisimlerin hiç bulunmadığı "boşlukta" dahi elektrik ve manyetik alanların birbirlerini üreterek yayıldıkları, enerji ve bilgi taşıdıkları izleniyor. Böylece alanların da fiziksel evrenin maddi parçacıklar kadar sahici ve önemli bileşenleri olduğunu görüyoruz.

Kuantum Fiziği Bohr'un hidrojen atomu modeliyle takdim ediliyor. Amaç atomların boyut, enerji ve kararlılıklarının, yani maddenin bildiğimiz yapısının, temelde maddenin dalga özellikleri taşımasından kaynaklandığını görmek. Dalga özellikleri Belirsizlik İlkesi ve Pauli İlkesini basit, sezgisel şekilde türetmek için kullanılıyor.

Bu kitaba esas olan ilk dersi Sabancı Üniversitesi'nde fizikçi arkadaşlarım Ünal Ertan, Zafer Gedik, Ersin Göğüş, Emrah Kalemci, Ahmet Oral ve Cihan Saçlıoğlu ile farklı dönemlerde birlikte verdik. Yuki Kaneko ve Defne Üçer Şaylan dersin gelişmesine ve koordinasyonuna büyük emek verdiler. Problemler yıllar boyunca herkesin katkılarıyla birikti; bazı problemlerde hazırlayanın ismini de göreceksiniz.

Arkadaşlarıma katkıları için çok teşekkür ederim. Yıllar önce dersle ilgili simülasyonları hazırlayan Murat Durmaz'a da teşekkürler; şekillerden bazıları, bu simülasyonlardan alındı. Dersin problem saatlerini veren birçok asistana ve yıllar boyunca dersi alan öğrencilerime de öneri ve eleştirileri için teşekkürler. Konu ve problemler arasında az sayıda daha zor olanlar (*) ile işaretlendi. Bunlar atlanabilir. Yıllar boyunca sınavlarda sorduğumuz problemleri "Ek Sorular" başlıklı bölümlerde verdik.

Metni İngilizceden çeviren kızım Zeynep Alpar'ın, bir sosyal bilim mezunu olarak, metnin daha iyi anlaşılması için yaptığı önerilerin değeri büyük. Çeviriyi Defne Üçer'le birlikte elden geçirdik. Yuki Kaneko ve Defne tüm metni ve şekilleri Latex ortamında yayıma hazır hale getirdiler. Onlar olmasa bu kitap ortaya çıkamazdı. Zeynep, Defne ve Yuki'ye en büyük teşekkürler.

İkinci baskının hazırlanışında entropi ile ilgili yeni bölümün şekillerini Mert Bozkurt hazırladı. Erbil Gügercinoğlu yeni baskıyı baştan sona titizlikle gözden geçirip düzeltmeler önerdi. Maral Yağyazan şekiller üzerinde gereken düzeltmeleri yaptı. Zeynep bütün Latex dosyaları üzerinden düzeltmeler yaptı. Yuki ilk baskı için hazırlanan eksiksiz dosyaları toparlayarak ikinci baskının derlenmesine yardımcı oldu. Hepsine içten teşekkürler.

Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi'ne ve editörüm Ergun Kocabıyık'a her iki baskının hazırlanışında takvime sadık, titiz çalışmaları için çok teşekkürler.

M. Ali Alpar
2 Ağustos 2019

Temel Fizik Sabitleri

Nicelik	Sembol	Değer*	Birim
Işığın boşluktaki hızı	c	299 792 458	$\mathrm{m\ s^{-1}}$
Manyetik sabit (boşluğun geçirgenliği)	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ $= 12{,}566\,370\,614... \times 10^{-7}$	$\mathrm{N\ A^{-2}}$ $\mathrm{N\ A^{-2}}$
Elektrik sabit $1/\mu_0 c^2$	ϵ_0	$8{,}854\ 187\ 817... \times 10^{-12}$	$\mathrm{N^{-1} m^{-2} C^2}$
Coulomb sabiti $1/4\pi\epsilon_0$	K, k_e	$8{,}987\ 551\ 787... \times 10^{9}$	$\mathrm{N\ m^2\ C^{-2}}$
Kütleçekimi sabiti	G	$6{,}674\ 28(67) \times 10^{-11}$	$\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$
Planck sabiti	h	$6{,}626\,068\,96(33) \times 10^{-34}$	J s
$h/2\pi$	$\hbar$	$1{,}054\,571\,628(53) \times 10^{-34}$	J s
Temel yük	e	$1{,}602\,176\,487(40) \times 10^{-19}$	C
Elektron kütlesi	m_e	$9{,}109\ 382\ 15(45) \times 10^{-31}$	kg
Proton kütlesi	m_p	$1{,}672\,621\,637(83) \times 10^{-27}$	kg
Proton-elektron kütle oranı	m_p/m_e	1836,152 672 47(80)	
İnce yapı sabiti $e^2/4\pi\epsilon_0\,\hbar c$	α	$7{,}297\,352\,5376(50) \times 10^{-3}$	
İnce yapı sabitinin tersi	α^{-1}	137,035 999 679(94)	
Avogadro sabiti	N_A	$6{,}022\ 141\ 79(30) \times 10^{23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$
Boltzmann sabiti	k, k_B	$1{,}380\ 6504(24) \times 10^{-23}$	$\mathrm{J\ K^{-1}}$
Mol gaz sabiti $k_B N_A$	R	8,314 472(15)	$\mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}$
Elektron volt ≡ e J/C	eV	$1{,}602\ 176\ 487(40) \times 10^{-19}$	J
(birleştirilmiş) atomik kütle birimi			
$1\ \mathrm{u} = m_u = \frac{1}{12} m(^{12}\mathrm{C})$	u	$1{,}660\ 538\ 782(83) \times 10^{-27}$	kg

* Parantez içindeki sayılar son iki basamaktaki hata payı. Örneğin $6{,}674\ 28(67) \times 10^{-11} \equiv (6{,}674\ 28 \pm 0{,}000\ 0067) \times 10^{-11}$.

Sembol	Tanım
x, y, z, r	Konum
v	Hız
a	İvme
t	Zaman
m	Kütle
Q, q	Yük
T	Sıcaklık, Gerilim, Periyot
F	Kuvvet
g	Dünya yüzeyinde Yerçekimi ivmesi (= 9,81 m/s
θ (*teta*)	Açı
N Parçacık sayısı (toplam)	
n Parçacık sayı yoğunluğu	
ω (*omega*)	Açısal hız
P	Periyot, Basınç, Güç
p	Momentum
μ (*mu*)	Sürtünme katsayısı
ρ (*ro*)	Kütle ya da yük yoğunluğu
W	İş, Ağırlık
U	Potansiyel enerji
K, KE, E_K	Kinetik enerji
L	Açısal momentum, Endüktans
τ (*tau*)	Tork
k	Yay sabiti, Dalga sayısı
V	Hacim, Voltaj
A	Alan
E	Enerji, Elektrik alanı
j	Akım yoğunlu
λ (*lambda*)	Dalgaboyu
f	Frekans
ϕ (*fi*)	Faz sabiti
I	Akım
σ (*sigma*)	Yük/alan yoğunluğu
C	Sığa (Kapasitans)
B	Manyetik alan
Φ (*fi*)	Akı, Dalga fonksiyonu
R	Direnç (Rezistans)
Ψ,ψ (*psi*)	Dalga fonksiyonu

1
Kısa Bir Felsefi Giriş

Bilim, dünyayı, evreni tanımanın belli, düzenlenmiş bir yoludur. Bu dünyaya bütün doğa, bunun içinde evrenin insanların yaşadığı minnacık köşesi, bu insanların zihinleri, kültürleri ve toplumları da dahildir. Bilim bir bilgi edinme yöntemidir ama bilim insanlarının kendileri de bilimsel yöntemin kurallarını çoğu zaman bilinçli ve açık olarak kullanmazlar. Yine de yöntem, bilimin temelidir. Bilim insanları, yöntemi sağduyu olarak kabul ederler.

Sahiden de bilimsel yöntem, gündelik hayattaki sağduyunun özelleşmiş bir uzantısıdır. Bilimin gelişmesinin uygarlık üzerinde başlıbaşına, muazzam bir etkisi oldu. Bu etki sadece bilimin uygulamadaki sonuçları yani teknoloji olarak değil, felsefi alanda da, dünyaya dair bir sağduyu yaklaşımının somutlaşması olarak görüldü.

Peki bilim insanlarının temel felsefi *inançları* neler? İlk olarak, bir dış dünya/maddi dünya var. "Dünya" derken sadece bizim Dünya gezegenimizi değil, evreni ve içindeki her şeyi kastediyorum. "Dış/maddi" demek, dünyaya dair bilgilerimiz kendi zihnimizin dışında bir şeye dayanıyor demek; farklı insanların, farklı zihinlerin aynı ortak bilgiye ulaşabilmesi de bundan kaynaklanıyor.

Dünyayı bilmek, *gözlem* ve *deney*, artı mantıksal çıkarımlar (matematik) ile mümkün. Bilimin deneye dayalı temelleri, bu dersin ilerleyen bölümlerinde öğreneceğimiz modern bilimin öncüleri, özellikle de Galileo Galilei tarafından çok açık bir biçimde ortaya kondu ve kullanıldı. Doğa kanunlarının matematik kullanılarak ifade edilmesinin ilk büyük örneği Newton'un yaptığı çalışmalardır; Newton bu kanunları ifade etmek ve kullanabilmek için matematikte yepyeni bir alan açarak kalkülüsü kurdu. Bu ders, Galileo ve Newton'un geliştirdiği haliyle mekanikle, yani şeylerin nasıl hareket ettiğinin bilgisiyle başlayacak, kalkülüsü öğrenerek ve kullanarak ilerleyecek.

Nesnellik (objektivite), çoğu zaman bilimle birlikte düşünülen bir kelime. Kişi olarak bilim insanları da diğer insanlardan farklı değiller tabii ki, onların da kişisel duyguları ve istekleri var. Bilim insanlarının bilim yapma nedenleri de hayatlarının diğer yönleri gibi birbirinden çok farklı. Nesnellik terimi, bilimin mümkün olması için, hatta sağduyunun ve pratik bilginin mümkün olması için temel bir şeyi anlatır:

Farklı gözlemciler, aynı deneyi aynı koşullar altında yaptıklarında aynı sonuçlara varırlar.

Bilimsel yöntemin şöyle bir akışı var:

Öngörü → deney → doğruluyor mu? → bir daha kontrol edelim; doğrulamıyor mu? → hipotez yanlış.

VEYA

→ Teori sınırlı, yeni durumlar için doğru değil; dolayısıyla bütün bir teori olarak yanlış. Daha iyi, daha genel bir teori bulunmalı.

Filozof David Hume'un işaret ettiği üzere, aynı deneyi N defa yaparak aynı sonuca ulaşmak, deneyi $(N + 1)$inci defa yapınca yine aynı sonucun bulunacağını ispat etmez.

Aynı deneyin $(N + 1)$inci defa yapıldığında yine aynı sonucu vereceği, bilim insanının *inancıdır*. Bu inanç, bilimin şimdiye kadarki başarılı deneyimiyle desteklenmiştir.

Bilimin uygulamaları ve tabii ki bizim gündelik deneyimlerimiz bu inancı destekliyor. Dünyayı deniyoruz ve deneyimlerimize dayanarak mantıksal çıkarımlarda bulunuyoruz. Neyin "hakikat" ("gerçek") olduğunu/hakikaten işlediğini deney ve mantıksal çıkarım yoluyla öğreniyoruz. Bilim, sistemli sağduyudur.

Bilimsel sonuçlar hiçbir zaman mutlak anlamda doğrulanamazlar. Deneyin bir sonraki tekrarında, tıpatıp aynı şartlar altında başka bir sonuç çıkabilir: Deneyi yapmadan bilemeyiz bunu. Fakat şimdiye kadar bilimin ve genel olarak insan deneyimlerinin bütün tarihinde, aynı şartlar altında defalarca denenip gözlenen sonuçlar, gözlemin ve deneyin yeniden yapıldığı her seferde yine aynı çıkmıştır. Bilimde doğrulama, bu güçlü ama ilke olarak yine de sınırlı olan yoldan yapılır. Sınırlılıklarına rağmen, bilimde, bilgi veya inanç edinmenin başka kaynaklarında mümkün olmayan bir şekilde doğrulama vardır, yanlışlama da vardır.

20. yüzyıl filozoflarından Karl Popper, doğrulamanın tersinin, yani yanlışlamanın, bilimsel bilgiyi diğer bilgilerden ayıran daha da güçlü ve sağlam bir özellik olma potansiyelini vurgulamıştır. Bilimsel bilgi *yanlışlanabilir*. Dikkatli bir deneyle yapılan tek bir yanlışlama, bir bilimsel önermenin yanlış olduğunu göstermeye yeter. Tamamen aynı şartlar altında aynı iddianın bazen doğru bazen yanlış çıktığı hiç olmadı. Fakat çeşitli koşullarda çok defa test edilmiş ve doğrulanmış bir bilimsel teorinin öngörülerinin, daha önce test edilmemiş yeni ve farklı bir koşulda doğru çıkmadığı oldu. Böyle bir şey olduğu zaman, eski teori, her şeyi açıklayan *genel* bir teori olarak yanlışlanmış olur. Bu teori artık, pek çok koşulda geçerli olsa da her koşulda geçerli olmayan sınırlı bir teoridir. Bu durum, eski deneyler konusunda eski teoriyle de büyük ölçüde uyumlu olan ama yeni deneyleri de açıklayabilen, yeni ve daha genel bir teori bulmak gerektiğini gösterir. Newton mekaniği, çok başarılı olduğu halde bütün durumları kapsamayan teorilere iyi bir örnek. Çok yüksek hızda, ışık hızına yakın hızlarda hareketin olduğu deneyler ve

gözlemcilerin birbirine göre hızı ne kadar olursa olsun ışık hızının bütün gözlemciler için aynı değerde ölçüldüğünü ortaya koyan deneyler, Newton mekaniğini genel bir teori olarak yanlışladı. Bu konudaki (şimdiye kadar yanlışlanmamış) başarılı yeni teoriler Einstein'ın özel görelilik teorisi ile yine Einstein'ın kütleçekimi ve ivmeyle ilgili genel görelilik teorisidir.

Maddenin yapısı ve atom alanında klasik fiziğin yerini alan bir diğer modern teori de kuantum mekaniğidir. Bilindik, gündelik deneyimlerimiz bakımından çok tuhaf bir teori bu. Kuantum mekaniğine göre dünya temel olarak olasılıklara dayalı; deneyle test edebileceğimiz sorular da olasılıklarla ilgili. Gelgelelim, dünyanın bu tuhaf özelliği bilimsel yöntemi değiştirmiyor, kuantum mekaniğinin soruları da tıpkı diğer bilimler için olduğu gibi deney yapılarak test ediliyor ve kuantum mekaniği şimdiye kadar yanlışlanmış değil. Modern bilimin bir başka çok başarılı teorisi de Darwin'in evrim teorisi. Bu teorinin de hiçbir öngörüsü yanlışlanmadı henüz. Teori, genetiğin anlaşılmasıyla ve moleküler biyolojinin vardığı sonuçlarla uyumlu şekilde, bugün teknolojik ürünler olarak kullandığımız pratik sonuçlar verdi. Evrim teorisinin hâlâ tam olarak anlaşılamamış pek çok sorusu var. Kuantum mekaniği ile genel göreliliğin kesişim alanı, çok başarılı iki teorinin de hâlâ tamamlanmamış olduğu, çok zor sorunların bulunduğu bir diğer sınır. Ama bilimin doğası böyledir işte: Bilim hiçbir zaman tamamlanmaz, araştırma hiç bitmez. İyi bir bilimsel teori, şimdiye kadar denendiği alanların hiçbirinde yanlışlanmamış bir teoridir sadece. Bilimsel bir teori asla gerçekten son haline gelmez, asla tamamlanamaz. Fakat denenmiş ve henüz yanlışlanmamıştır. Gelecekte belki yanlışlanabilir, belki de yanlışlanmayacaktır. Teori tekrar tekrar denenmeye açıktır ve potansiyel olarak yanlışlanabilir. Herhalde bu özellik, herkes tarafından sınanabilir, öğrenilebilir ve kullanılabilir olmak anlamında "gerçek" olmanın en gerçek halidir.

Deney ve gözlemle keşfettiklerimizin *doğa kanunları* ile açıklanabilmesi şaşırtıcı, ama gerçektir; doğa kanunları matematikle ifade edilebilir ve temel kurallar hem basit hem de güzeldir.

Şaşırtıcı da olsa doğrudur bu! Efsaneye göre Galileo'ya atfedilen sözlerle; *"Eppur si muove!"* – "ama yine de dönüyor!"

Galileo'nun sahiden de böyle söyleyip söylemediği bilinmiyor. Eğer söylediyse bunu Dünya'nın dönmesi için söylemiştir; ama bu sözler, insanlar ne derlerse desinler, doğanın kendi yasalarına göre davrandığını, bizim gözlem ve deneylerle bu yasaları öğrenip anlayabildiğimizi ve bunun ne müthiş bir şey olduğunu da anlatıyor.

Bilim yalnızca gözlemlenebilen dünya üzerine konuşur. Din veya felsefe, dünya hakkında somut bir iddia ortaya koyacak şekilde yorumlanmadığı sürece, bilim hiçbir dini ya da felsefeyi kanıtlamaz ve çürütmez. Somut iddiaların olduğu durumlarda ise bilim, böyle dar yorumlu dinî inançların gözlemlediğimiz dünyada bir temeli olmadığını göstermiştir.

2
Bilim Üzerine Birkaç Söz Daha

Bilimsel ifadeler, dünya hakkında, deneyle *yanlışlanabilecek* ifadelerdir. Bilimde değişmez doğrular yoktur. Sınanmamış *a priori* (deney öncesi, önsel) yargılara, inanışlara ve tahminlere de, ne kadar akla yakın önermeler gibi görünürlerse görünsünler yer yoktur bilimde. Akla yakın önermeler de nihayet deneyle sınanması gereken hipotezlerdir. Bilimsel bir *"gerçek"* ("hakikat"), çok sayıda bağımsız gözlemcinin pek çok kez denediği ve doğruladığı bir şeydir. *Gerçek, ancak bu bilimsel anlamındaki kadar gerçek olabilir.*

Bilimsel bilgi, gücünü sadece öyledir diye kabul edilir ya da inanılır olmak yerine, sınanabilir olmaktan alır. Deneyi ya da gözlemi aynı şartlar altında tekrar eden herkes aynı sonuca varır.

Bilimsel ifadeler *şartlara bağlıdır*. Bilimsel bilgi nihayetinde doğa hakkındaki gözlemlerden ve deneylerden elde edilir ve bunlarla kontrol edilir. Elde edildikleri deneylerin sonuçları gibi, bilimsel ifadeler de gözlemlenen veya deney yapılan sistemin şartlarına, konumuna (yerine ve zamanına) ve sistem üzerindeki kısıtlamalara bağlıdır. *"Şartlara bağlı" demek, "rasgele, keyfi" demek değildir.*

Deney sonuçları (ölçümler), muhtemel hata payları (deneyin duyarlılığı) ve hata kaynaklarıyla birlikte ifade edilirler.

Örnek

Dünya'nın yüzeyine yakın cisimler, *yüzeyde* yaklaşık değeri $g = -9,81$ m/s^2 olan bir ivmeyle düşerler (Dünya'ya doğru ivme kazanırlar). Burada şartlar *eğik* yazılmıştır. Deney şartlarının daha hassas biçimde tanımlanması için daha ayrıntılı bilgi verilebilir: "*Yakın*" ne demektir? "*Yüzeyde*" ne demektir? Dünya üzerinde farklı enlem ve boylamlarda g hep aynı mıdır?

Bilimsel yöntem doğa hakkında bilgi edinmenin yegâne yolları olan deney ve gözleme dayanır. Bu yöntem, şu dünyada hayatımızı sürdürmemize rehber olmak bakımından sağduyu ile örtüşür. Kendimin ve başka insanların deneyimlerinden bilirim ki pis su içersem hastalanabilirim. Dolayısıyla pis su içmem. Sağduyu deneyimlere dayanır, üstelik bunlar sadece insanın kendi deneyimleri değil, diğer insanların da paylaştığı deneyimlerdir. Deneyimler başka insanlar tarafından da

paylaşılabilir, çünkü doğada aynı şartlar altında herkesin başına her zaman aynı şey gelir. Bilimsel yöntem, sağduyunun sistemli olarak genişletilmesidir. Bilimsel Yöntem ilk olarak şartları kaydetmeye, deneyleri kontrol etmeye ve gözlemleri izlemeye dikkat eder. İkincisi, bilim doğayı bizim gündelik dünyamızın çok ötesindeki şartlarda da gözlemler. Bilimsel bilginin önemli bazı kısımları insanların gündelik deneyimlerine dayanan sağduyuya aykırı gibi görünebilir ya da başta öyle gibi görünmüştür. Bunlar, gündelik deneyimlere aykırı olabilirler ama bilimde kullanılan anlamıyla sağduyuya aykırı değillerdir.

"Sağduyuya" ters görünen veya ilk başta öyle gelmiş olan ünlü bazı bilimsel önerme örnekleri şöyle:

- Demir ve pamuk boşlukta tamamen aynı şekilde düşerler.
- Dünya düz değildir.
- Dünya uzayda, Güneş'in çevresinde bir yörüngede hareket eder.
- Bir cismin üzerine etki eden kuvvetler cismin hızını değil ivmesini belirler.
- Bir elektron, bir atom, hatta her cisim, aslında hem dalga hem de parçacıktır (kuantum mekaniği).
- Eğer ikizlerin biri bir uzay yolculuğuna çıkar, ışık hızına yakın hızlara kadar hızlanır ve Dünya'ya geri dönerse, Dünya'da kalan ikizine göre çok daha genç olacaktır (görelilik).
- İnsanlar ve maymunlar milyonlarca yıl önce yaşayan aynı atalardan türemişlerdir (evrim).

İnsana akıl almaz gelen, büyüleyici görünen bilimsel bilgiler, gündelik deneyimlerimizin dışında kalan mekân ve zaman alanlarında, gündelik hayatımızda yaşamadığımız şartlarda yapılan gözlem ve deneylerle doğrulanmıştır. Çok çok nadir olarak rastlanan olayların, yeterince uzun zaman varsa gerçekleşme ihtimali olur. Bilim, inanılmaz gibi görünen hipotezlerinin *doğru* olup olmadığını, bunun nasıl ve neden olduğunu, *yanlışlanabilir* olmanın bilimdeki anlamını kullanarak bulur: *defalarca denenip, şimdiye kadar yanlışlanmamış olan, doğrudur*. İnsan zihninin ürettiği birçok heyecan verici hipotezin bir kısmının sahiden de doğru olduğu bilimsel yöntem kullanılarak anlaşıldı. Doğada gerçek bazen kurgudan daha tuhaf olabiliyor. Doğanın bilimi, yani bir şeyleri anlama süreci de, doğanın kendisi kadar heyecan verici olabiliyor.

Bilimde bir *teori*, farklı şartlar altında yapılan çok sayıda deneye dayanır. Teori birtakım genel *kanunlar* ve belirli özel kurallar ile bunların arasındaki *mantıksal bağlantılardan* oluşur. Teori, *öngörülerde* bulunur, bunlar yeni *deneylerle*

sınanması gereken *hipotezlerdir*. (Ama bütün hipotezler, ortaya konmuş bir genel teoriden gelmez.)

Günlük konuşmalarda "teori", "tahmin" veya "spekülasyon" anlamında kullanı- labiliyor. Fakat bilimde teorinin farklı, *iyi tanımlanmış bir anlamı* var: "Teori, öngörülerde bulunabilen, öngörüleri deneylerle iyice sınanmış olan, düzenli bir bilgiler bütünüdür."

Newton'un mekaniği, Maxwell'in elektromanyetik teorisi, Termodinamik Kanunları, Einstein'ın görelilik teorisi, Darwin'in evrim teorisi, maddenin atom teorisi ve kuantum mekaniği, bunların hepsi birer bilimsel teoridir.

Bazen genel, temel, iyice denenmiş bir teori *yeni* deneylerle çelişkili olabilir. Bu, genellikle yeni teknolojinin yeni deneyleri mümkün kılmasıyla gerçekleşen, nadiren görülen bir durumdur. Böyle bir şey olduğunda, eski teorinin geçerli olduğu şartlar sınırlanmış olur. Eski teori artık tam bir genel teori değildir, her durum için doğru da değildir. Bu teorinin, genel bir teori olarak yanlış olduğu ortaya çıkmıştır. Ancak teori hâlâ, daha önce denenmiş ve doğrulanmış olduğu bütün durumlar için doğru ve kullanışlıdır. Artık eski teorinin yerine yeni ve daha genel bir teori konmalıdır. Yeni teorinin, eski teoriyi, geçerli olduğu şartlar altında kapsaması ama yeni durumları da açıklayacak şekilde onu genelleştirmesi gerekir. Bundan böyle yeni teori öngörülerde bulunur ve bu öngörülerin deneylerle doğrulandığı ölçüde başarı kazanır.

Örnek: Newton mekaniği ışık hızına yakın hızlardaki hareketler için geçerli değil! Burada yeni ve daha genel olan teori, Einstein'ın görelilik teorisi devreye giriyor. Görelilik teorisi, ışık hızına yakın hızlarla yapılan deneylerin doğruladığı öngörülerde bulunuyor. Düşük hızlarda, yani $v << c$ olduğunda Einstein'ın öngörüleri Newton'un mekaniğiyle yüksek bir hassasiyet derecesiyle uyuşuyor (c ışık hızıdır). Newton mekaniğine göre eğer bir cisim 1. gözlemciye göre **v** hızıyla hareket ediyor, 1. gözlemci de 2. gözlemciye göre **V** hızıyla hareket ediyorsa, cisim, 2. gözlemciye göre

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}$$

hızıyla hareket ediyor demektir. "Galileo hız dönüşümü" denen bu basit kural bize çok açık geliyor, çünkü gündelik hayat tecrübemize uyuyor ve birçok deney sonucu da bunu doğruluyor. Einstein'ın teorisi bunun yerine şunu öngörüyor:

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{V}}{1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2}$$

Alışık olduğumuz düşük hızlarda, eski sonuç yeterince hassas. Eski sonuç, Einstein'ın bulduğu kesin sonuçtan vV/c^2 derecesinden bir hatayla farklı, bu da alıştığımız durumlar ve klasik mekanik deneyleri için çok küçük bir hata payı.

Yüksek hızlardaki deneylerde ise $\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2$ terimi yeterince büyük olduğundan Einstein'ın öngörüsü doğrulanıyor. Eğer ışığı ele alırsak $v = c$ olduğunda $v' = c$'dir. Yani ışık hızı c, birbirlerine göre hangi hızla hareket ederlerse etsinler sabit hızlı bütün gözlemciler için hep aynıdır. Hiçbir cisim ışıktan daha hızlı hareket edemez

Einstein, teorisinin ipuçlarını, Maxwell'in formüle ettiği elektrik ve manyetizma teorisinde buldu. Gayet temiz ve güzel olan Maxwell teorisine göre ışığın hızı gözlemcilerin hızı ne olursa olsun bütün gözlemcilere göre aynıdır. Bu da Newton mekaniğinin yukarıdaki Galileo hız kuralıyla çelişiyor. Fakat Maxwell denklemlerinin Einstein'ın göreli mekaniğiyle tutarlı olan doğru bir genel teori oluşturduğu anlaşıldı. Einstein'ın, teorisini geliştirirken, ışığın hızı ile Dünya'nın hareketi arasında herhangi bir ilişki bulamayan, ışığın hızının cismin hareketinden bağımsız olarak hep aynı olduğunu gösteren, yani Einstein'ın teorisini destekleyen Michelson-Morley deneyinden haberi yoktu.

PROBLEMLER

1. Şu noktalarda, kütleçekimi ivmesini hesaplayın:

   (a) Dünya'nın yüzeyinde,

   (b) Dünya'nın en yüksek binasının tepesinde (Dubai'deki Burj Halifa, 828 m),

   (c) Everest Tepesi'nde (zirve ~8700 m).

$$g = \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + H)^2}$$

   Burada g kütleçekimi ivmesi, G evrensel kütleçekimi sabiti, ve H Dünya yüzeyinden yüksekliktir. Dünya'nın kütlesi $M_\oplus \cong 6 \times 10^{24}$ kg, yarıçapı $R_\oplus \cong 6400$ km'dir. Dünya'nın tam bir küre olduğu varsayılıyor. (Bu doğru mu?)

2. Dünya yüzeyi yakınında kütleçekimi ivmesi g,

$$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}(1 + \frac{H}{R_\oplus})^{-2}$$

   Binom açılım formülü kullanılarak açılabilir:

$$(1 + x)^k = 1 + kx + \tfrac{k(k-1)}{2}x^2 + \ldots$$

   Bu formül $-1 < x < 1$ ise herhangi bir k sayısı için geçerli, k'nin bir tam sayı olması gerekmiyor. $|x| << 1$ için, açılım sadece iki veya üç terimle, aslına epey yaklaşık bir sonuç verir.

g'nin Everest Tepesi'ndeki değerini Binom Açılım Formülü'nü kullanarak hesaplayın ve Problem 1'de bulduğunuz sonuçla karşılaştırın.

3. Bir otoyolda 100 km/saat süratle gidiyorsunuz. Bir başka arabanın size göre 20 km/saat süratle yanınızdan geçtiğini görüyorsunuz.
   (a) Bu araba, sabit bir gözlemciye göre ne kadar hızlı gidiyor? Cevabı Galileo hız dönüşümü ile bulun. Bu sonuç Einstein'ın hız dönüşümü formülüyle bulacağınız sonuçtan ne kadar farklı?
   (b) Arabanızın farlarının ışığı, saatte 100 km hızla giden arabanıza göre ışık hızı c ile yol alıyor. Galileo'ya göre, farlarınızın ışığı sabit bir gözlemciye göre ne kadar hızla yol alıyor? Einstein'ın teorisine göre cevap nedir?

3
Bilimler Arasındaki İlişki

Doğadaki bir sistemi incelerken, biyolojide, jeolojide ya da kimyada olsun, en sık sorulan, en temel sorular şunlar:

"Hangi maddeden oluşuyor?"
"Nasıl işliyor?"
"Neden?" Yani "*Hangi nedenler bu etkileri yaratıyor?*" anlamında; yoksa "*Ne için, hangi amaçla?*" anlamında değil;
"*Ne için, hangi amaçla?*" sorusu bilimin sorusu değildir.

Tekrar tekrar sorulan bu sorular şunlara varıyor:

- Maddenin en küçük, temel yapı taşları: atomlar, çekirdekler, temel parçacıklar...

Bunlar da başka şeylerden mi oluşuyor? Küçüldükçe küçülen parçacıklar listesinin bir sonu var mı? Eğer varsa en son temel yapı taşları neler? Şmdi elimizdeki kuarklar ve leptonlar listesi nihai, tam liste mi? Şimdiki teorilerin öngördüğü temel parçacıklar gerçekten var mı? Bunların kütleleri, yükleri, diğer özellikleri ne? Bilim insanları CERN'deki devasa deney makineleriyle bu sorulara cevap arıyorlar.

- Madde parçaları ve enerji arasındaki bütün etkileşimleri belirleyen en temel kuvvetler, en temel doğa yasaları neler?

En derindeki temel kuvvetler sahiden bunlar mı? Daha derin başka bir şeyden geliyor olabilirler mi? Fizikteki dört temel kuvvetin (kütleçekimi, elektromanyetizma, zayıf etkileşimler, güçlü etkileşimler) bazıları aslında aynı şeyin farklı yönleri mi, yani aslında daha az sayıda (birleşik) temel kuvvet mi var? Günümüz teorileri elektromanyetik, zayıf ve güçlü etkileşimlerin aslında tek bir birleşik temel etkileşimin farklı yüzleri olduğunu gösteriyor. Bu şimdiden deneylerle büyük ölçüde doğrulandı, ama henüz bütün ayrıntılar deneyle doğrulanmış değil, cevaplanması gereken önemli sorular var hâlâ.

Üç temel kuvvet birleştirildi, fakat kütleçekimi dışarıda kaldı. Bilim insanları kütleçekiminin diğer kuvvetlerle ilişkisini bilmiyorlar. Kütleçekiminin kuantum mekaniğiyle nasıl bir ilişkisi olduğunu da henüz bilmiyoruz. Kütleçekimi

çok zayıf ama uzun menzilli, yani etkisi çok uzaklara ulaşabilen bir kuvvet, tüm kütle ve enerji parçaları arasında etki ediyor. En büyük cisimlerin, Dünya'nın, gezegenlerin, yıldızların, galaksilerin hareketlerini kütleçekimi belirliyor. Büyük Patlama'dan itibaren bütün evrenin tarihini belirleyen de kütleçekimi.

- Bilimsel araştırmalarda sık sık sorulan bir soru, *"Elimdeki problemi anlamak için önce neyi anlamam lazım?"* sorusudur.

Bu yaklaşımla biyolojideki problemler kimyaya, sonra da mikroskobik fizik problemlerine indirgenir. Buna *indirgemecilik* denir. Bu bir ilkedir ve bir bütün olarak bilimin genel yapısını görmemizi sağlar.

İndirgemecilik tarihsel olarak önceden ortada olan bir şey değildi; bilim tarihinin akışı içinde deneylerle öğrenildi. Bilimin önemli pek çok sorusu indirgemeci bir yaklaşımla açıklandı. İşte birkaç örnek:

- *Organizmalar da, inorganik madde için geçerli olan kurallara göre mi işlerler?*

Bu soruya önemli bir cevap, ilk olarak 17. yüzyılda, Harvey'in kanın basınçla dolaştığını, kalbin de bir pompa gibi çalıştığını anlamasıyla geldi.

- *Canlı madde ile inorganik madde aynı şeylerden mi oluşur?*

Bu soru, 19. yüzyılda organik kimyanın gelişmesiyle cevaplandı. Ürenin laboratuvarda sentezlenmesi bu yönde çok önemli bir adım oldu.

Lakin bütün hikâye indirgemecilikten ibaret değil. Sistemler, değişik niceliklerle ve niteliksel değişikliklerle birbirinden farklı özellikler kazanıyor. Bunlar için yeni kavramlar gerekiyor; bu yeni kavramlar üzerinden yeni sorular soruluyor. Mesela *ısı, basınç* ve *entropi* kavramlarının tek bir parçaçık için hiç anlamı yok, ama Avogadro sayısı (6×10^{23}) kadar çok sayıda parçacık içeren sistemler için çok kullanışlı kavramlar bunlar.

Termodinamik Kanunları gibi çok önemli kanunlar bu yeni kavramlarla ifade ediliyor. Bunlar bilimsel kanunlar, yani deneyle sınanabilen öngörülerde bulunan kanunlar. Bu makroskobik kanunlar ile fiziğin mikroskobik kanunları arasındaki ilişki, fizikte ilginç bir alandır.

Yeni seviyelerde kullanılan başka yeni kavramlar da var; mesela kimyadaki *asit, baz, çözelti, pH* gibi kavramlar. Biyolojiye özgü, hâlâ cevaplanamamış önemli bir soru, "*Hayat nasıl başladı?"* sorusu. Hâlâ üstünde çalışılan cevapları ve sorunlarıyla bir başka biyoloji sorusu da, evrim teorisi alanında, "*Yaşam biçimleri nasıl çeşitleniyor?"* sorusu. (Yaşam biçimleri çeşitleniyor mu, yoksa türler her zaman sabit mi kalıyor? Bu soru zaten cevaplandı: Evet, türler çeşitleniyor, evrimleşiyor, yeni türlere ayrılıyor ve soyları tükeniyor.) "*Kalıtım nasıl işliyor?"* Bu soru, genler, DNA molekülleri vb. terimlerle cevaplanıyor. İlke olarak, genetiğin mekanizmaları da kimyaya ve fiziğe indirgenebilir, ama bu her zaman pratik veya işe yarar olmuyor.

Psikolojide *davranışla, zekâyla, mizaçla* ilgili pek çok soru, *sinir sistemi* ve *beynin fizyolojisi ve biyokimyası* üzerinden ele alınıyor. Burada başarılı olan varsayım yine indirgemeci, ama bu defa kavramlar, mesela sinir hücrelerinin yapı ve işlevlerine dayanıyor. Bilinç hakkında halihazırda bildiğimiz pek az şeye kıyasla anlaşılması gereken daha çok ama çok şey var.

Astronomi için temel bir soru "*Madde, her yerde aynı bileşenlerden mi oluşuyor ve evrenin her yerinde aynı doğa kanunları geçerli mi?"* Cevap, şimdilik, evet. Astronomide de diğer bilimlerde olduğu gibi indirgemeci bir gelenek var. Aynı zamanda, astronomi gözlemleri, büyük ölçeklerde, maddenin, kütleçekiminin belirlediği yapı ve dinamiklerini buluyor. Farklı mesafe ölçeklerinde evrenin yapısı yeni kavramlar veriyor. Bilimde çok önemli bir gelişme, en büyük ölçeklerde maddenin kendine has özellikleri ve dinamikleri olduğunun gözlemsel kanıtlarının bulunması oldu: *Kozmoloji, yani evreni anlamaya çalışan bilim dalı gözleme dayalı bir bilim haline geldi.* Bir bütün olarak evren, bilimin araştırma alanına girdi. Gözlemlerle, evrenin genişlemekte olduğunu ve bir Büyük Patlama'yla başlamış olsa gerektiğini öğrendik. Şimdi anlaşıldığı kadarıyla evren zaman geçtikçe artan bir hızla genişliyor ve kütleçekimi hiçbir zaman bu genişlemeyi durdurup geri toparlayamayacak. Astronomi ve kozmolojide son 20-30 yıl içinde kaydedilen gelişmeler, sıradan maddenin evrenin ancak yüzde 5'ini oluşturduğunu, geri kalanın ise tabiatını gerçekten bilmediğimiz *karanlık madde*'den (yüzde 20) ve *karanlık enerji*'den (yüzde 75) oluştuğunu gösteriyor. Karanlık madde, radyasyon yaymadığı için uzaktan gözlenmesi zor olan birkaç tür maddeden (karadeliklerden veya yıldız olarak parlamamış çok küçük kütleler olan kahverengi cücelerden veya bazı tür temel parçacıklardan) oluşuyor olabilir. Karanlık maddede elimizdeki bu adayların hangilerinin, hangi miktarlarda bulunduğunu bilmiyoruz. Bundan da esrarlısı var: karanlık enerji. Eğer evrenin ivme kazanarak genişlediğini düşündüren gözlemler doğrulanmaya devam ederse, evrenin yaklaşık yüzde 75-80'i karanlık enerjiden, yani kütleçekimine karşı hareket eden itici bir güç sağlayan bir şeyden oluşuyor demektir. Bunun ne olduğuna dair şimdilik hiçbir fikrimiz yok. Karanlık madde ve karanlık enerji, bilimdeki *oluşan* kavramlara iyi birer güncel örnek.

Bilimdeki problemlerin farklı *karmaşıklık* seviyeleri var; bunlar çalışılan sistemin karmaşıklığını yansıtıyor. Karmaşıklık, bir sistemdeki parçacıkların sayısının çok olmasından daha öte bir şey. Aslında, makroskobik seviyedeki bir sistem için uygun olan kanunlar ve en azından bazı davranış türleri hiç de karmaşık değil. Karmaşıklık, büyük bir sistemin parçaları arasındaki etkileşim biçimlerini ve bağlantıları da kapsıyor. Bilgisayarların gelişmesiyle karmaşıklığın bazı türlerini modellemek ve sınıflandırmak mümkün hale geldi. Bilim artık farklı dalları arasındaki ilişkileri de, doğadaki farklı ebat ve ölçüler arasındaki ilişkileri de kapsamlı biçimde yeniden ele alabiliyor. Geleneksel indirgemeci yaklaşım şimdi, *oluşum* (peyda olmak ya da ortaya çıkış; İngilizce "*emergence*"), yani büyük sistemlerde

yeni yapıların ve işlevlerin nasıl ortaya çıktığı üzerine çalışmalarla tamamlanıyor: Büyük sistemin, küçük parçaları için tanımlı ve anlamlı olmayan özellikleri, bu parçalar bir araya geldiğinde nasıl ortaya çıkıyor?

Bilimin, her seviyede, mikroskobik ve makroskobik sistemlerin her türlüsünde, hem indirgemeci hem oluşumlu kavramlar için geçerli olan bazı kanunları var. Enerjinin korunumu herhalde bu kanunlara en önemli örnek. Momentumun, açısal momentumun, yükün ve kütlenin korunumu gibi diğer korunma kanunları da çok genel geçerliliğe sahip.

Sorular

- Doğada, bilimin farklı dalları tarafından çalışılan oluşumlara neler örnek verilebilir?
- Su ve havanın oluşumlu özellikleri neler?
- 1 litre suda kaç su molekülü var?
- 3 m × 3 m × 3 m hacimli bir odada kaç tane hava molekülü var?

Örnek: *Akışkanlar Mekaniği*: Bir akışkanın davranışını anlamak için her bir molekülün hareketini, onun çevresiyle ve akışkanın diğer molekülleriyle etkileşimini dikkate almamıza gerek yok. Bunun yerine, çok sayıda parçacıktan oluşan bir sistemi ele alan bazı *makroskobik nicelikleri* kullanabiliriz. Bu makroskobik özellikler tek bir parçacığın veya molekülün davranışından değil, çok sayıda parçacık veya molekülün toplu davranışından oluşurlar. Akışın Reynolds sayısı bu oluşum özelliklerinden biridir.

$$R = \frac{\rho V L}{\nu}$$

Burada V akışkanın akış hızı, L akışın içinde bulunduğu sistemin tipik bir uzunluğu (mesela borunun çapı), ρ (*ro*) akışkanın yoğunluğu, ν de viskozitedir. Viskozite, bir akışkanın "kıvamının" ölçüsüdür. Mesela balın viskozitesi suyunkinden yüksek, suyun viskozitesi de havanınkinden yüksektir. Reynolds sayısı bize bir akışkanın akışı hakkında çok şey anlatır. Reynolds sayısına bakarak bir akışın türbülanslı olup olmadığını söyleyebiliriz. Türbülans, akışta, akışın kendisinden çok daha küçük ölçüde bozulmaların (küçük dalgalanmaların) oluşması demektir. Bozulmalar girdap biçiminde olabilir. Bu, enerjinin daha küçük ölçekteki dinamiklere aktarımından kaynaklanır. Küçük girdaplar oluşup akışı yavaşlatır. Deneylerle biliyoruz ki, Reynolds sayısı > 1000 ise bir miktar türbülans beklenir.

Bütün bilimler ve bilimdeki bütün problemler tasarlanmış deneylere açık değildir. Bu durumlarda bilimsel araştırma tasarlanmış deneyler yerine gözlemle ilerler. Gözlem, astronomi ve jeolojinin yegâne ilerleme yoludur. Biyolojide ve sağlık bilimlerinde, doğayı etkileyebilecek fiziksel bilimlerde ve sosyal bilimlerin pek çok alanında deney yapmak mümkün olmayabilir veya ahlâki nedenlerden dolayı kabul edilebilir değildir.

Sosyal bilimler genel olarak doğa bilimlerinden çok daha karışıktır. Konunun ayrılmaz bir parçası olan *öznellik*, soruna uygun kavramları ve kanunları belirleyip karmaşıklığı indirgemeyi çok zorlaştırır. Model oluşturmak ve analojiler kurmak tehlikeli ve yanıltıcı olabilir. Öznel öğeler sosyal bilimlerde kaçınılmaz olabilir. Bilgi edinirken öznelliği dikkate almanın ve gözlemcinin bakış açısını kayda geçirmenin, bir yandan da bunu bilginin iletilmesini mümkün kılacak ve sonucun başkaları tarafından da anlaşılmasını sağlayacak şekilde yapmanın bazı zorlukları var. Bu, sosyal bilimleri doğa bilimlerindeki karmaşıklıklardan ayıran çok farklı bir zorluk boyutu. Ancak bu durum sosyal bilimlerin kendine özgü zorluklarından ve karmaşıklığından genelleme yaparak, bilimin karar vermenin mümkün olmadığı belirsiz bir şey olduğu ve bütün bilgi edinme yollarının, dünyaya dair bütün tanımlamaların aynı ölçüde geçerli olduğu şeklinde yanlış bir sonuca varmayı meşrulaştırmıyor. Doğa bilimlerinde tekrarlanabilir deneyler yapılabiliyor olduğundan dolayı nesnellikten bahsedebiliyoruz. Deneyi kimin yaptığının bir önemi yok.

Bilimin bir alanının kavramlarını ve analojilerini başka bir alana yapıştırmak, özellikle doğa bilimlerinde işleyen modellerin sosyal bilimlerde geçerli olmasını beklemek de meşru değil. Analojiler faydalı ipuçları sunabilir ve ilham verebilir, fakat başka bir bağlamda da kullanışlı olmaları için bu analojilerle yanlışlanabilir hipotezlere ulaşmak, gözlemlenebilir öngörülerde bulunmak ya da en azından üzerinde tartışılabilecek sonuçlara varmak gerekiyor. Bilimin ortak amacı, yani dünyaya dair doğrulanabilir ve yanlışlanabilir, dolayısıyla paylaşılabilir bilgiler elde etmek, bütün bilimlerin ideali. Bu ideale ulaşma çabası sosyal bilimlerde kendine özgü ek karmaşıklıklarla karşılaşıyor.

Toplumun değişmesi ile bir fiziksel sistemin ya da makinenin hareketi arasında kurulan analojileri düşünün. Tarihin "döngüsel" olduğu ya da her zaman "ilerleme" olduğu şeklindeki bir ifade şiirsel olabilir, siyasi bakımdan işlevsel olabilir, akıllıca da olabilir, ama bilimsel değil; çünkü yanlışlanabilir, sınanabilir öngörülerde bulun- muyor. Bunun yanlışlanabilir bir halini üretmek için "döngüsel"i ya da "ilerleme"yi gözlemlenebilecek bir şekilde tanımlamaya çalışabiliriz. Ama o zaman da teori o kadar genel, o kadar ilginç olmaz. Bunun aksine, evrenin bir sonu olacağını ya da olmayacağını söyleyen bir teorinin gözlemlerle sınanması ilke olarak (ve uygulamada da) mümkündür; teorinin, evrenin şimdi gözlemlenen durumuna dair öngörülerini sınayacak belli ölçümlerle yapılabilir bu.

Matematik, sanat ve teknoloji gibi başka yaratıcı faaliyetlerin bilimle ortak

noktaları, kendi konularını kendi *mantık, akıl ve yöntemleriyle* ele almaları. Bunlar da araştırıyor, deneyimlerle öğreniyor ve birikimli bir kültürü yayıyorlar. Fakat bunu bilimsel yöntemin özel, yapılandırılmış yolunu kullanarak yapmıyorlar.

Aslında bilim insanları da bilimsel yöntemi sürekli olarak, bilincli olarak, kullanma kılavuzundan okur gibi adım adım uygulamıyorlar. Herkes gibi onlar da kişisel amaçları ya da gruplarının amaçları doğrultusunda davranıyorlar. Yine de doğa bilimleri birikimini bilimsel yöntem düzenliyor, çünkü doğanın kendi kanunları var. Galileo'ya atfedilen, fakat onun belki de hiç söylemediği sözlerle, *"Eppur si muove."*

Feynman'dan alıntı yapalım: Bir şeyin bilim olmadığını söylemek, o şey bilim değil demektir, o kadar. Bu onun iyi olmadığı anlamına gelmiyor asla. Feynman'ın sözleriyle, "Ne de olsa *aşk* da bilim değil."

PROBLEM

1. Aort gibi büyük bir atardamardaki kan akışı için Reynolds sayısını hesap edin. Aortun yarıçapı ~ 1 cm, akış hızı ortalama ~ 0,35 m/s, kanın yoğunluğu 37° C'de (vücut sıcaklığı) ~ 1000 kg/m^3, kanın viskozitesi ise suyun viskozitesinin yaklaşık 4 katıdır (Suyun viskozitesi $2{,}8 \times 10^{-3}$ kg s^{-1} m^{-1}).
   Kanın akışı türbülanslı olabilir mi? Bu neden önemli?

4

Bazı Temel Araçlar

Bilimsel Gösterim, Hatalar, Boyut Analizi, Temel Sabitler ve Vektörler

4.1 BİR DİL OLARAK MATEMATİK

Doğa kanunları ve bilimin formülleri genellikle matematik denklemleri olarak ifade ediliyor. Matematik, bilimsel bilgiyi kısa ve kesin bir ifadeyle anlatan dili sağlıyor. Fenle aşinalığı olmayan insanlar bazen matematiksel ifadeleri görünce yılgınlığa düşüyor, hatta bunlardan korkuyorlar. Bütün matematiksel ifadelerin aslında özel bir dilde yazılmış cümleler olduğunu kabul etmek işinize yarayacaktır.

Matematik dilinin söz dizimi standart ve basittir. $A = B$ şeklindeki bir denklem sadece, A sembolüyle ifade edilen niceliğin B değerine eşit olduğunu anlatır. Eğer A'nın ve B'nin ne demek olduğunu bilirseniz, cümle gündelik dile çevrilmiş olur, o zaman bu cümlenin ne anlattığını düşünüp anlamaya çalışabilirsiniz. Bazen A ile B arasındaki ilişki eşitlik değil de başka bir şeydir, mesela A, B'den büyük olabilir, bu da $A > B$ diye anlatılır. A ile B arasındaki sembol, matematik cümlesinin yüklemidir. ='in "eşittir" diye okunması gibi, > de "büyüktür" diye okunur ve bu böyle gider.

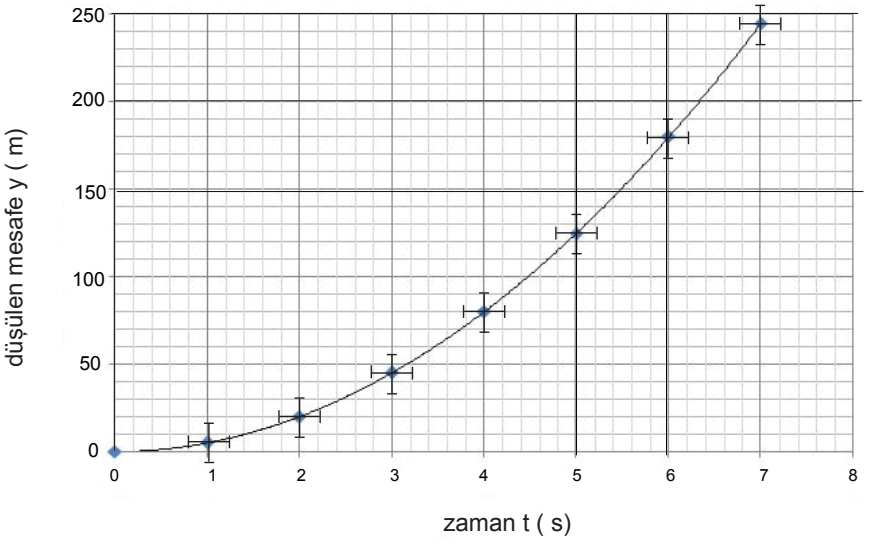
Genelde, denklemin sağ tarafında B gibi tek bir sembol değil de, $A = B + C$ gibi, sembollerin ve işlemlerin bir birleşimi olur. Bu tipik olarak $B, C, D, \ldots$ niceliklerine bağlı olabilen karışık bir işlemler dizisidir; o zaman $A = f(B, C, D, \ldots)$ diye ifade edilir ve "A; B, C, D niceliklerinin *bir fonksiyonuna* eşittir" diye okunur. Fonksiyon (veya bağlılık); toplama ve çarpma gibi çeşitli işlemleri ve bir şeyin karesini almak, beşinci kuvvetini almak, *sinüsü, kosinüsü, üssü* veya *logaritması* gibi bir şeyini almak şeklinde bir işlemi anlatabilir.

Böyle şeyleri daha önce öğrenmediyseniz ya da ne demek olduklarını unuttuysanız endişe etmeyin. Zamanı gelince bunları bilimin bir konusu bağlamında öğreneceğiz. Şimdi önemli olan ilk işimiz, matematik cümleleriyle rahat olmak ve denklemleri okuyup onları "A; B, C vesaireden şöyle bir yolla hesaplanan bir şeye eşittir" diye cümlelere çevirmek. A, B, C gibi semboller bu cümledeki isimler; bunlar sadece, birtakım şeylerin kısa adları. Sembollerin ne anlama geldiğini bildiniz mi işiniz tamam; artık matematiksel ifadeyi bir cümle gibi okuyabilirsiniz.

Doğa kanunlarının meşhur bir örneği, Newton'un İkinci Kanunu. $F = ma$ formülüyle ifade edilip, "F , m kere a'ya eşittir" diye okunuyor. Bilimde genellikle belli semboller hep aynı nicelikleri ifade etmek için kullanılıyor, mesela bir nesnenin konumu hep x, y ve z ile anlatılıyor. F de böyle, kuvveti ifade eden bir sembol; m, kütle; a da ivme demek. Böylece Newton'un İkinci Kanunu, "bir nesneye uygulanan kuvvet, o nesnenin kütlesi ile ivmesinin çarpımına eşittir" şeklinde okunuyor. Matematiğin kelimelere tercümesi böyle. Bu ifadeyi anlamak için, insanın tabii ki kuvvetin, kütlenin ve ivmenin ne demek olduğunu bilmesi gerekir. Yolumuza devam ederken öğreneceğimiz şey işte bu: Bilimdeki kavramların, onları tanımlayan deneyler ve ölçümler bakımından ne demek olduğunu öğreneceğiz.

Yeni bir sembolün, başka semboller kullanılarak ilk defa tanımlandığı yerde, $=$ yerine $\equiv$ işaretini kullanacağız. $A \equiv f(B, C, ...)$ ifadesi, "A; $f(B, C, ...)$ ifadesinin kısa sembolü olarak tanımlanır" demektir. Bu kitaptaki Semboller Listesi'nde sık kullanılan bazı sembolleri ve bunların ne demek olduğunu sıraladık.

Matematiğin çok kuvvetli bir görsel dili de var: Geometri, özellikle de bilimde grafiklerin kullanımı. Bunun kuralı basit: Bir grafik, $A = f(B)$ gibi bir ilişkinin görsel ifadesidir. Dikey eksene A, yatay eksene B dersiniz, A ve B'nin birimlerini bu eksenlerin üzerine yazarsınız. $A = f(B)$ ilişkisi, grafikte bir eğri olarak görünür. Gözlem veya deney verilerinin grafiğini yapmak için, (B, A)'nın ölçülmüş sayısal değerlerini, veri noktaları olarak grafiğe, aşağıda tartışacağımız *hata çubukları* ile birlikte işaretlersiniz. Şekil 4.1'de basit bir grafik örneği var. Yerinden bırakılan bir nesne, t zamanı içinde $y = (1/2)gt^2$ mesafesi kadar düşüyor: Formül bir eğri olarak gösteriliyor, deneyle elde edilmiş veri noktaları da hata çubuklarıyla birlikte gösterilmiş.



Şekil 4.1

4.2 BİLİMSEL GÖSTERİM VE HATALAR

Doğada birçok farklı ölçek var. Uzunluklar (boyutlar) nötron, proton, elektron ve kuarklar gibi temel parçacıkların 10^{-15} metre ve daha küçük boyutlarından, evrenin boyutları olan 10^{26} metreye kadar, çok çeşitli. Zaman ölçekleri, mesela çok yüksek frekanslı elektromanyetik dalgaların (çok yüksek enerjili *gama ışını fotonlarıdır* bunlar) 10^{-27} saniyelik salınım periyotlarından, evrenin yaşına, yani ~ 10^{10} yıla kadar değişiyor. Hemen her nicelik türü için, uzunluk, zaman, kütle, enerji, sürat, dönüş hızı, asitlik, bir çözeltide şu veya bu kimyasalın konsantrasyonu, elektrik ve manyetik alanlar, voltaj, akım, sıcaklık, çeşit çeşit canlı hücrenin boyları, organizmaların boyları, aynı tip reaksiyonlarda bile değişen kimyasal reaksiyon oranları ve daha niceleri için, doğada çok çeşitli ölçekler ve değerler var. Bir metalin paslanması da, bir patlama da, yanma, oksitlenme reaksiyonlarıdır; bu iki olayda oksitlenme hızları birbirinden ne kadar farklı varın siz hayal edin.

Her türlü nicelik için verdiğimiz sayılar, birimler sistemine bağlı. Kullandığımız, metre, saniye, gram vb. ölçek birimleri insan ölçeklerinden seçilmiş. Bu birimler kullanıldığında bazı ölçümler çok büyük sayılarla ifade edilebilir, bazı miktarlar da çok küçük sayılar gerektirir. Bizim orta boy, insan ölçeklerindeki birimlerimiz, mesela santimetre, metre ve kilometre, birbirinin yüz veya bin katı olabilirken, doğanın karşımıza getirdiği ölçekler bundan çok çok daha geniş bir çeşitlilik gösteriyor. Dolayısıyla, hangi ölçeği kullanırsak kullanalım çok büyük sayılar ve çok küçük sayılar olacak. 1.000.000.000.... gibi çok büyük bir sayıyı, diyelim burada 27 tane sıfır olsun, 10^{27} diye gösteriyoruz; 0,000 000 000 ....001 gibi çok küçük bir sayıyı ise, diyelim ki burada da virgülden sonra 54 tane sıfır olup, 1 de 55. basamakta olsun, 10^{-55} olarak gösteriyoruz. Standart *bilimsel gösterimde* bir sayı, 1 ile 9 arasında bir tamsayı, ardından bir nokta ve bu sayının ifade ettiği *hassasiyet derecesi* için gereken kadar basamak kere, 10 üzeri pozitif veya negatif bir kuvvetten oluşur. Mesela $123.456 = 1{,}23456 \times 10^5$; $0{,}000\ 000\ 000\ 123 = 1{,}23 \times 10^{-10}$; $-10101{,}02 = -1{,}010102 \times 10^4$ gibi. Burada 10 üzerindeki kuvvetlere *büyüklük mertebesi*,* noktadan önce ve sonra gelen basamak sayısına da *anlamlı basamak sayısı* denir.

Matematiksel büyüklükler olan reel sayılar içinde yalnızca *kesirli (rasyonel, oranlı) sayılar*, çok sayıda basamakla da olsa tam olarak ifade edilebilirler. $\sqrt{2}$ gibi *irrasyonel (oransız) sayılar*'ın ve π gibi *aşkın sayılar*'ın tam olarak ifade edilebilmesi için sonsuz sayıda basamak gerekir. Kullanılan anlamlı basamak sayısı, hesaplama için gereken hassasiyete bağlıdır.

---

* Doğadaki farklı büyüklük ölçeklerini, 10'un üslü kuvvetleriyle atomun içinden, kuarklardan başlayıp evrende bizden 10 milyar ışık yılı uzağa kadar giden videolarla şu web adreslerinden izleyebilirsiniz: https://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/; https://www.youtube.com/watch?v=jfSNxVqprvM

Sorular

- İnsan ölçeğindeki birimlerimiz metre, gram ve saniyenin kökeni ve tanımı nedir?
- Zaman birimleri sistemimizde neden 12 ve 60 gibi sayılar var?
- Neden sayıları 10'un kuvvetleri üzerinden ifade eden onluk sayı sistemini kullanıyoruz?

Bilimde kullanılan sayılar ölçülmüş nicelikleri ifade eder. Bilimsel sayıların genellikle *birimleri* ve *boyutları* olur. Birimleri olmadan bu sayıların bir anlamı olmaz. Bilimde bir sayının hassasiyeti (kesinliği), o sayıyı oluşturan niceliğin ölçümünün hassasiyetine temelden bağlıdır. İnsan, uygulamanın kendine özgü ihtiyaçlarına göre, ölçümlerin hassasiyetinden daha düşük hassasiyet düzeyleriyle çalışmaya karar verebilir. Ölçülmüş bir miktar, hata paylarıyla birlikte, mesela $(1{,}23 \pm 0{,}02) \times 10^{-6}$ m olarak ifade edilir.

Birçok sayının ve bunların her birinin kendine ait hata paylarının kullanıldığı bir hesap yaparken, sonucun hata payı, girdilerin (hesaba katılan sayıların) hata paylarından hesap edilebilir. Laboratuvarda deney yaparken ölçümlerin hata paylarını tahmin etmeyi ve çıkan sonuçların hata paylarını hesap etmeyi öğrenirsiniz. Hata payları verilmemişse, anlamlı basamakların sayısı bir niceliğin hassasiyetini yansıtır.

Herhangi bir hesapta, hesaplanmış bir sonucun hata payı, hassasiyet derecesi en az olan girdinin hata payından daha küçük olamaz. Miktarlar toplanır veya çıkartılırken, cevaptaki ondalık basamakların sayısı, işlem yapılan sayılar içinde ondalık basamak sayısı en az olanınkine eşit olur. Miktarlar çarpılır veya bölünürken, cevaptaki anlamlı basamak sayısı, işleme katılan sayılardan anlamlı basamak sayısı en az olanınkine eşit olur.

Soru

Bir hesap makinesi kullanarak $4{,}25 \times 10^{15}$'i $1{,}1924 \times 10^{-5}$'e bölün. Hesap makinesi ne sonuç veriyor? Bilimsel gösterimle doğru hassasiyet derecesinde ifade edilen cevap ne olur?

Cevap

$4{,}25/1{,}1924 = 3{,}56424....$ Gelgelelim, ilk sayının (4,25) hassasiyeti 2 ondalık basamak kadar olduğu için, cevabın hassasiyeti de 2 ondalık basamak kadar olmalı: 3,56. Böylece, doğru hassasiyet dereceli cevap $3{,}56 \times 10^{20}$ olur.

Ölçüm Hassasiyeti

Örnek 1: Her kilonun bir çizgiyle işaretlendiği ibreli bir tartıda tartılıyorsanız, ölçümünüzün hata payı 0,5 kg kadardır. Bu durumda ağırlığınızı 0,5 kg'lık farkla ölçebilirsiniz: 56,4 *pm* 0,5 kg.

Örnek 2: Bir pinpon masasının (standard uzunluk 264 cm) uzunluğunu 20 metrelik bir mezure ve 20 santimetrelik bir cetvelle ölçüyor olsanız, her iki durum için ölçümünüzün hassasiyet derecesi ne olur? Mezurenin de, cetvelin de her milimetresi çizgilerle işaretlenmiş. Mezureyle yaptığınız ölçümün hata payı birkaç milimetre kadar olabilir. Böylece, mesela 263,8 *pm* 0,3 cm gibi bir ölçüm yapabilirsiniz. Fakat 20 cm'lik cetvel kullandığınız zaman, arka arkaya 13-14 defa ölçü almanız gerekecek, her ölçümün de birkaç mm hata payı olacak. Bu hatalar üstüste eklenecek ve ölçümünüzün hassasiyeti azalacak. Hata payını her ölçüm için 2 mm olarak kestirebilirsiniz, eğer 14 ölçüm yaparsanız toplam hata payınız ~ 2,8 cm olur. O zaman, 265 ± 3 cm gibi bir ölçüm yapabilirsiniz. Masanın kesin uzunluğu iki ölçümün de sınırları içinde kalıyor fakat ölçümlerin hassasiyetleri birbirinden farklı.

4.3 BOYUT ANALİZİ

Boyut analizi bilimde yapılan hesapları kontrol etmek için önemli bir araçtır. Kullandığımız nicelikler ve bunların birimleri kütle M (kg), uzunluk L (metre, m) zaman T (saniye, s), ve yük Q (Coulomb, C) cinsinden ifade edilir. Bu birimler uluslararası sistemin (Systéme International, SI) temel birimleridir.

[ ] şeklindeki gösterim, "boyutları" anlamına gelir. Hız (v), ivme (a) ve enerjinin (E) boyutları şöyle:

$$[v] = L/T = M^0 L^1 T^{-1}$$
$$[a] = L/T^2 = M^0 L^1 T^{-2}$$
$$[E] = ML^2/T^2 = M^1 L^2 T^{-2}$$

Örnek: Serbest Düşüş Süresi

Bir elma, h yüksekliğindeki daldan düşüyor. Boyut analizi kullanarak elmanın yere varış süresinin başka değişkenlere nasıl bağlı olduğunu bulabiliriz.

Serbest düşüş zamanı t'nin, başlangıç yüksekliği h'ye, kütleçekimi ivmesi g'ye, ve belki elmanın kütlesi m'ye bağlı olduğunu söyleyebilirsiniz. Öyleyse,

$$t \propto h^{\alpha}\ g^{\beta}\ m^{\gamma}$$

Bu, boyutların da işe katılmasıyla, şöyle oluyor:

$$M^0 L^0 T^1 = [L]^{\alpha}\ [L/T^2]^{\beta}\ [M]^{\gamma}$$

Bu eşitliğin iki tarafı birbirine uymalı, dolayısıyla *M, L,* ve *T*'nin kuvvetlerine bakarak görebiliriz ki:

$$\begin{aligned} M &: 0 = \gamma \\ L &: 0 = \alpha + \beta \\ T &: 1 = -2\beta \qquad \rightarrow \beta = -1/2 \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri çözerek, $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/2$, ve $\gamma = 0$ olduğunu buluyoruz. O halde:

$$t \propto h^{1/2}\ g^{-1/2}\ m^0$$

$$t = C\sqrt{\frac{h}{g}}\ ,$$

burada *C* boyutsuz bir sabittir.

4.4 TEMEL SABİTLER

G, Newton'un kütleçekimi sabitidir.* Dersimizin Mekanik bölümünde kullanacağımız bu sabitin değeri $6{,}67 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}.

h, Planck sabitidir. Bununla, dersimizin son bölümü Kuantum Mekaniği'nde karşılaşacağız. Değeri, $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J s. (Joule (J), bu kitapta kullandığımız SI birim sistemindeki enerji birimidir, 1 J = 1 kg m^2 s^{-2}.) Planck sabiti genellikle, *"h-çizgi"* denen, $\hbar \equiv h/2\pi$ şeklindeki kombinasyon olarak kullanılır.

c ışık hızıdır. Değeri, $c = 3 \times 10^8$m s^{-1}.

Temel parçacıkların elektrik yükleri bir diğer temel sabitin, yük kuantumu *e*'nin tamsayılı katlarıdır; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ Coulomb. Protonun yükü *e*, elektronun yükü ise $-e$'dir.

Temel sabitlerin bazı boyutsuz kombinasyonları vardır. Bunlar yalnızca sayıdır, birimleri olmaz, fakat bize fiziksel dünya hakkında önemli şeyler anlatırlar. Önemli bir örnek, *"ince yapı sabiti"*dir. Bir elektronla bir proton arasındaki elektrostatik *kuvvet*, Ke^2/r^2 büyüklüğündedir. Bu, iki parçacık arasındaki kuvvet *r* mesafesine bağlıdır ama elektromanyetik etkileşimlerin gücünü *"bağlanma sabiti"* Ke^2

* Bu kitabın başındaki "Fizikteki Temel Sabitler" listesine bkz.

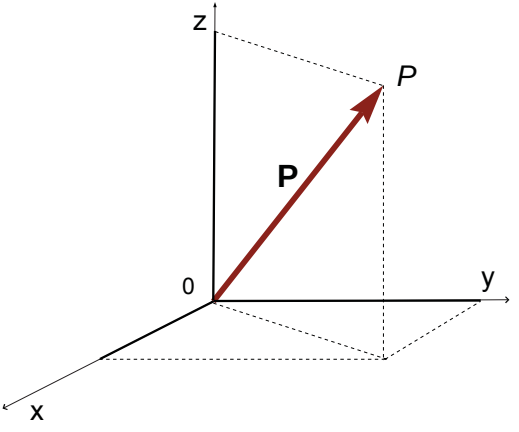
yansıtır. *K* sabitinin ve temel yük *e*'nin sayısal değerleri birim sistemine göre değişir. *"İnce yapı sabiti"* denen sabitler kombinasyonunun ise birim sisteminden bağımsız olarak değeri şudur:

$$\alpha \equiv \frac{Ke^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137} \tag{4.1}$$

İnce yapı sabiti, elektromanyetik etkileşimlerin *boyutsuz* bağlanma sabitidir. Karşılaştırma olsun diye, güçlü nükleer kuvvetin bağlanma sabitine bakalım: Bu sabitin yine birimlerden bağımsız boyutsuz değeri 1 civarındadır. Boyutsuz bağlanma sabitlerini karşılaştırarak güçlü nükleer kuvvetin (etkin olduğu atom çekirdeği içinde) elektromanyetik etkilerden çok daha baskın olduğunu görüyoruz ($1 \gg 1/137$).

4.5 VEKTÖRLER

Üç boyutlu uzayda bir *P* noktasını ele alalım. Birbirini dik kesen *x*, *y* ve *z* eksenlerinin *orijinO*(0, 0, 0)'da buluştuğu *dik açılı* bir koordinat sisteminde, *P*'nin koordinatları (*x, y, z*)'dir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2

P noktasındaki bir parçacığın konumu, verilen koordinat çerçevesindeki koordi- natları olan *x*, *y* ve *z* sayılarıyla tam olarak belirtilmiştir. Aynı bilgi, koordinat çerçevesinin merkez noktası *O*'dan başlayıp, ucu *P*'ye varan bir ok ile gösterilir. Üç sayıdan oluşan (*x, y, z*) kümesine veya bunun dengi olan görsel nesneye, yani *OP* doğru parçasına bir *vektör* denir. Bu, "büyüklüğü" ve yönü olan bir nesnedir.

Vektörler, adlarının üstüne konan küçük bir ok ($\vec{P}$) veya kalın yazılarak (**P**) gösterilirler. Bu örnekteki vektörümüze **P** diyelim.

4.5.1 Büyüklük

P vektörünün *büyüklüğü*, *P* noktasının *O*'dan uzaklığıdır. **P**'nin büyüklüğünü sadece *P* diye, kalın yazmadan gösteriyoruz. Büyüklük, negatif olmayan bir reel sayıdır, şöyle bulunur:

$$|\mathbf{P}| = P = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \tag{4.2}$$

Bu nereden çıkıyor? Şekil 4.2'de de gördüğümüz dik açılı bir üçgenin uzun kenarının* uzunluğunu bulmaya yarayan Pisagor formülünden.

Büyüklükleri **P** ile aynı olan çok sayıda vektör var (Sonsuz sayıda; merkezi *O*, yarıçapı da *P* kadar olan küre üzerindeki bütün noktalar kadar). **P** bütün bunların arasında eşsiz benzersiz, çünkü (*x, y, z*) koordinatlarıyla büyüklüğün yanı sıra bir *yön* de belirtiliyor.

Sorular

- İki boyutlu koordinat sisteminde, **P** ile aynı büyüklükte vektörler düşünebiliyor musunuz? Bu vektörler nerede bulunuyor?
- Peki ya tek boyutta **P** ile aynı büyüklükte başka vektörler var mı?

4.5.2 Toplama ve Çarpma

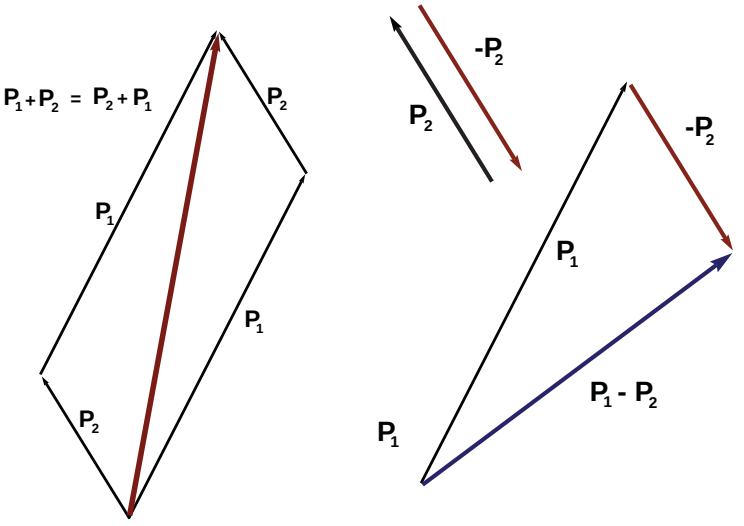
İki vektörün toplanması, bilimde ihtiyaç duyulan, faydalı bir işlemdir. $\mathbf{P_1} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\mathbf{P_2} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri, *O* merkezinden çıkan iki farklı yol izleyerek iki farklı noktaya ulaştıran vektörler ise, bu iki yolu katetmek, hangi sırayla olursa olsun, bizi aynı son noktaya götürür:

$$\mathbf{P_1} + \mathbf{P_2} = \mathbf{P_2} + \mathbf{P_1} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \tag{4.3}$$

Geometrik olarak toplam vektör, $\mathbf{P_1}$ ile $\mathbf{P_2}$'nin tanımladıkları paralelkenarın köşegenidir (Şekil 4.3'e bakın).

Bir vektörü bir sayıyla çarpmak kolay: $a\mathbf{P} = (ax, ay, az)$. Mesela, 3,29 kere **P**, **P** ile aynı yönde, onun 3,29 katı uzunluğunda bir vektördür. $-\mathbf{P} = (-1)\mathbf{P}$ ise, **P** ile aynı büyüklükte fakat ters yönde bir vektördür.

* Hipotenüs.



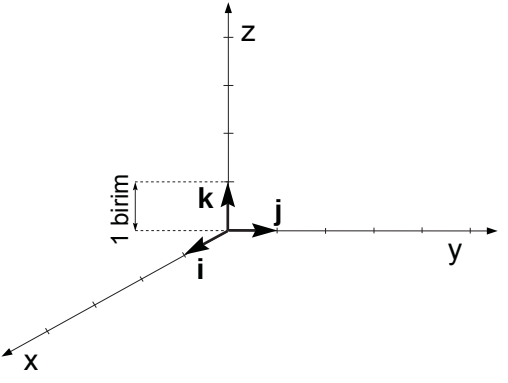
Şekil 4.3

4.5.3 Birim Vektörler

P'yi şöyle de yazabiliriz:

$$\mathbf{P} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{4.4}$$

Burada **i**, **j**, **k** *birim vektör*'lerdir. Bu birim vektörler, sırasıyla *x*, *y* ve *z* eksenlerinde birer birim büyüklüğünde (yani uzunluğunda) vektörlerdir (Şekil 4.4'e bakın). *x, y, z* koordinatları, **P**'nin x, y, z eksenleri üzerindeki *bileşenleri* veya *izdüşümleri*'dir.



Şekil 4.4

Çözümlü Problem: Birim Vektörü Bulmak

$\mathbf{A} = 2\sqrt{2}\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ vektörünün yönünde bir birim vektör bulun.

Birim vektörün büyüklüğü birdir (=1). Dolayısıyla, herhangi bir vektör yönünde birim vektörü şöyle tanımlarız: $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$. Şimdi önce **A** vektörünün büyüklüğünü bulalım:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= ((2\sqrt{2})^2 + (-5)^2 + 4^2)^{1/2} \\ &= (8 + 25 + 16)^{1/2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Böylece, birim vektör:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{2\sqrt{2}}{7}\mathbf{i} - \frac{5}{7}\mathbf{j} + \frac{4}{7}\mathbf{k}.$$

$\hat{\mathbf{A}}$'nın büyüklüğünün 1 olduğunu ve orijinal **A** vektörüyle aynı yönde olduğunu doğrulayabiliriz.

4.5.4 İç Çarpım

P_1 ile P_2'nin, $\mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2}$ olarak gösterilen "*iç çarpımı*", "*skaler çarpımı*" veya "*nokta çarpımı*" şöyle olur:

$$\mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2} = \mathbf{P_2} \cdot \mathbf{P_1} \equiv x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{4.5}$$

İki vektörün çarpımının sonucu sıradan bir pozitif veya negatif gercek sayı ya da sıfır olur, bu bir "*skaler* "dir (yönsüz, düz sayı), vektör değildir.

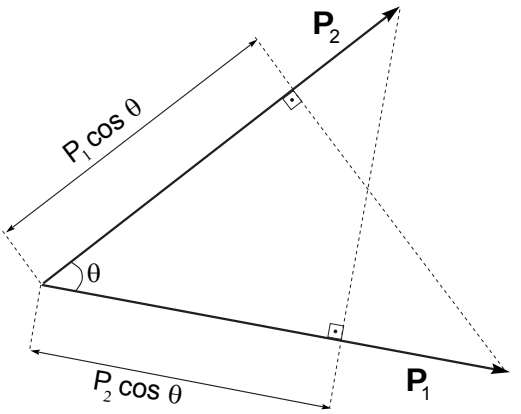
Bu iç çarpım aynı zamanda iki vektörün büyüklüklerinin çarpımı kere araların- daki açının *kosinüsüdür*.

$$\mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2} = P_1P_2 \cos\theta \tag{4.6}$$

Bu, $\mathbf{P_2}$'nin $\mathbf{P_1}$'deki izdüşümünün uzunluğunun P_1 katına, veya $\mathbf{P_1}$'in $\mathbf{P_2}$'deki izdüşümünün uzunluğunun P_2 katına eşittir. (Şekil 4.5'e bakın.)

Soru

$\mathbf{P_1}$ ile $\mathbf{P_2}$ biribirine dikse $\mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2}$'nin değeri nedir? Bunlar birbirine paralelse nasıl olur? Peki ya ters yönde paralelse?



Şekil 4.5

Bir vektörün kendi kendisiyle iç çarpımı, o vektörün büyüklüğünün karesi olur:

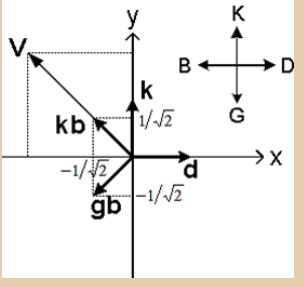
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{4.7}$$

Çözümlü Problem: İç Çarpım

İç çarpım (veya nokta çarpım), bir vektörün belli bir yöndeki izdüşümünü saptamak istediğimiz zaman işimize yarıyor.

Bir araba 50 km/saat sabit hızla kuzeybatıya doğru gidiyor.

1. Kuzey, doğu, kuzeybatı ve güneybatı yönlerindeki birim vektörleri **i** ve **j** cinsinden nasıl ifade edersiniz? +y yönünü kuzey olarak alın.



k, **d**, **kb** ve **gb** birim vektörleri resimde gösteriliyor. Birim vektörlerin büyüklüğünün 1 olması gerektiğine göre, resme bakarak şunları buluyoruz:

$$\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j}, \qquad \mathbf{d} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{kb} &= -(1)\cos 45°\mathbf{i} + (1)\cos 45°\mathbf{j} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \\ \mathbf{gb} &= -(1)\cos 45°\mathbf{i} - (1)\cos 45°\mathbf{j} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\end{aligned}$$

2. Kuzey ve güneybatı yönlerinde hızın bileşeni nedir?

Denklem (4.6)'yı kullanarak:

$$\begin{aligned}\mathrm{v_K} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = (50)(1)\cos 45° = 25\sqrt{2}\ km/sa \\ \mathrm{v_{GB}} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{gb} = (50)(1)\cos 90° = 0\end{aligned}$$

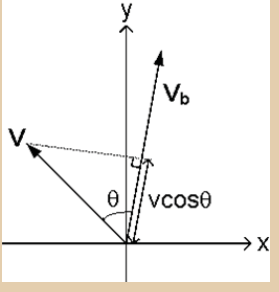
Bir başka yoldan, **v**'yi **v** = $(-25\sqrt{2}\mathbf{i} + 25\sqrt{2}\mathbf{j})$ km/sa diye yazabileceğimizi düşünerek, Denklem (4.5)'i kullanarak bileşenleri bulabiliriz:

$$\begin{aligned}\mathrm{v_K} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = [-25\sqrt{2}\mathbf{i} + 25\sqrt{2}\mathbf{j}]\cdot[0\mathbf{i} + 1\mathbf{j}] = 25\sqrt{2}\ km/sa \\ \mathrm{v_{GB}} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{gb} = [-25\sqrt{2}\mathbf{i} + 25\sqrt{2}\mathbf{j}]\cdot[-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}] = 0\end{aligned}$$

Burada vektörlerin büyüklükleri verildiği ve vektörler arasındaki açılar resimden geometrik olarak kolayca bulunabildiği için, çözerken ilk yöntemi kullanmak daha kolay.

İki vektör arasındaki açı bilindiğinde ikinci yöntemi kullanmayı tercih edebiliriz.

3. Bir otobüs başka bir yöne doğru $\mathbf{v}_0$ = (10**i** + 70**j**) km/sa hızla gidiyor. **v**'nin otobüsün hareket ettiği yöndeki bileşeni nedir?



Önce v_0 yönündeki birim vektörü buluyoruz:

$$\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{0} = \frac{\mathbf{v}_\mathrm{b}}{|\mathbf{v}_\mathrm{b}|} = \frac{10\mathbf{i} + 70\mathbf{j}}{(\sqrt{10^2 + 70^2})} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{7j}}{5\sqrt{2}}$$

$\hat{v}_0$ yönünde **v**'nin bileşeni:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{0} &= \frac{[-25\sqrt{2}\mathbf{i} + 25\sqrt{2}\mathbf{j}] \cdot [\mathbf{i} + 7\mathbf{j}]}{(5\sqrt{2})} \\ &= 30\ km/sa\end{aligned}$$

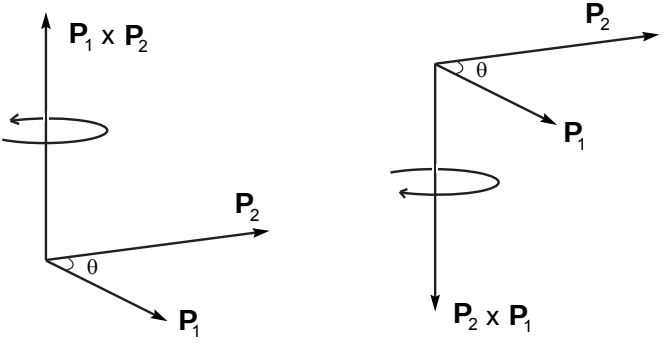
Buradan θ açısını da bulabiliriz:

$$\theta = \cos^{-1}(\mathrm{v_B}/\mathrm{v}) = \cos^{-1}(30/50) = 0,93\ rad = 53,1^\circ$$

4.5.5 Vektörel Çarpım

Üç boyutta, iki vektörün "*vektörel çarpım*" veya "*çapraz çarpım*" denen bir çarpımı daha var:

$$\mathbf{P_1} \times \mathbf{P_2} = (y_1 z_2 - z_1 y_2,\ z_1 x_2 - x_1 z_2,\ x_1 y_2 - y_1 x_2) \tag{4.8}$$



Şekil 4.6

İç çarpımdan farklı olarak, *çapraz çarpım sonucunun kendisi bir vektördür*. Bu çarpımın büyüklüğü, P_1 kere P_2 kere ikisinin arasındaki açının *sinüsüdür*.

$$|\mathbf{P_1} \times \mathbf{P_2}| = P_1 P_2 \sin\theta \tag{4.9}$$

Yani, çapraz çarpımın büyüklüğü, $\mathbf{P_2}$'nin, $\mathbf{P_1}$*'e dik olan bileşeni* kere P_1, ya da bunun tersidir.

$\mathbf{P_1} \times \mathbf{P_2}$'nin yönü, $\mathbf{P_1}$ ve $\mathbf{P_2}$'nin bulunduğu düzleme diktir ve sağ el kuralının belirttiği yöne bakar.

Soru

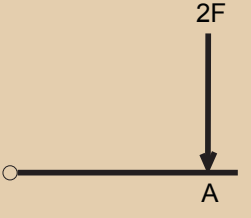
$\mathbf{P_2} \times \mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_1} \times \mathbf{P_2}$'ye eşit midir? Bunların arasındaki ilişki nedir?

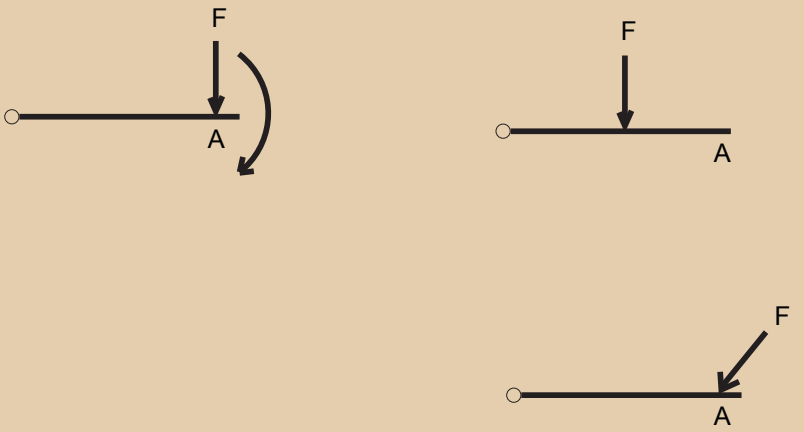
4.5.6. Vektörler Ne İşe Yarıyor?

Bilimdeki pek çok nicelik vektördür. Bunun örnekleri konum, hız, ivme, kuvvet, elektrik alanı, manyetik alan vb. Bu nicelikleri dersin ileriki safhalarında tanıyacaksınız. Burada bu nicelikleri kullandığımız, vektör kavramlarını gösteren birkaç örnek var. Bazı önemli vektör nicelikleri diğer vektörler cinsinden, vektör ilişkileriyle tanımlanıyor.

Örnek: Vektör (Çapraz) Çarpımları

- **Lorentz kuvveti:** $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
  q yüküne sahip bir parçacık, $\mathbf{v}$ hız vektörüyle $\mathbf{B}$ manyetik alanında hareket ederse, manyetik alan bu parçacığa $\mathbf{F}$ kuvvetini uygular. Bu kuvvet, parçacığın yükü, parçacığın sürati ve hareket yönüne dik manyetik alan bileşeniyle orantılı. Diğer bir deyişle kuvvet, parçacığın yükü, manyetik alan ve parçacığın manyetik alana dik hız bileşeniyle orantılı.
- **Tork:** $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
  Bir kapıyı iterek açarken, kapının ne kadar kolay açılacağını ne belirler? Kuvveti nereye uyguladığınıza, kuvvetin büyüklüğüne ve kuvvetin yönüne bağlıdır bu. Aşağıdaki çizimlere bakın:





Resimde, A noktasına F kuvveti uygulanıyor. Kapı, resimde gösterilen yönde açılıyor. Sağ taraftaki resimler üç farklı durumu gösteriyor:

1. A'ya 2F uygulanıyor,
2. Kapının menteşesine daha yakın bir noktaya F uygulanıyor,
3. A'ya F bir açıyla uygulanıyor.

Bu durumların her birinde, dönme etkisi soldaki resimdekinden daha mı büyük, daha mı küçük, yoksa eşit mi olur? Deneyimlerimizle biliyoruz ki moment kolu (menteşe ile kuvvetin uygulandığı yer arasındaki mesafe) arttıkça, kuvvet arttıkça ve kuvvet moment koluna daha dik olarak uygulandıkça dönme etkisi artar.

Nesneleri döndüren etkiye *tork* denir. Torkun tanımı: $\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.
Buradaki çapraz çarpımda yukarıda anlatılan bütün bilgiler mevcut. Uygulanan kuvvetin artmasıyla, moment kolunun uzamasıyla ve uygulanan kuvvet ile moment kolu arasındaki açı 90° olduğunda tork (yani kapının dönmesini sağlayan kuvvet) artar. Bunu şöyle de söyleyebiliriz: Dönme üzerinde yalnızca, moment koluna dik olan kuvvet bileşeninin etkisi var.

Bir vektör zamanla değişebilir. Yani büyüklüğü ve/veya yönü değişir. Vektörün zamana göre değişme oranını ("türevini") hesap ederken büyüklüğün değişmesinin yanı sıra yönün değişmesi de dikkate alınır. Dairesel harekette, yani mesela bir ipin ucuna bağlanmış bir topu çevirirken, topun konum vektörünün yönü sürekli değişir, büyüklüğü, yani ipin uzunluğu ise sabit kalır.

Soru

Dairesel harekette hız vektörüne ne olur?

Bilimdeki pek çok problemde, insan bir vektörün uzayın birçok farklı noktasındaki değerini bilmek ister. Mesela bir ırmakta suyun akışını incelerken ilke olarak suyun ırmağın her noktasındaki hızını ele almamız gerekir. Bu bir *hız alanıdır*. Elimizde, **v** hızının, (x, y, z) koordinatlarının (veya kendisi de bir vektör olan $\mathbf{r} = (x, y, z)$'nin) bir fonksiyonu olarak noktadan noktaya değişen hız değerleri var. Yani $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Işığın su yüzeyinde saçılmasından ve suyla beraber hareket eden köpükler, yapraklar ve başka şeylerden dolayı, hız alanını suyun yüzeyinde fiilen görebiliriz. Bunun bir fotoğrafını çekerseniz hız alanının zamanın bir ânındaki haritasını elde etmiş olursunuz. Bu haritada hız vektörünün noktadan noktaya nasıl değiştiğini inceleyebilirsiniz. Dolayısıyla bir vektör niceliğinin konumsal olarak, yerden yere değişmesinden (konuma göre türevlerinden) bahsedebiliriz. Temelde bir vektör alanının iki farklı tür konumsal değişimi, vektör alanının haritasını veya resmini çizince göreceğimiz iki tür temel yapı ya da desen vardır.

Soru

Suyun nasıl aktığını gösteren, üstünde oklar olan akış çizgileri çizerek haritalar, yani hız alanı resimleri yapın. Böyle haritaları televizyondaki hava durumu programlarında da görürsünüz. Farz edin ki haritanız, akış çizgilerini çekiştirip düzeltebileceğiniz elastik bir malzeme üzerine çizilmiş olsun. Haritalarınızın, uzatıp düzelterek, kıvırarak, sıkıştırarak veya başka bir şekilde değiştirerek atamayacağınız iki tür özelliği olabilir. Nedir bu özellikler? Bu özellikler haritanın temel yapısını belirliyor ve vektör alanının iki tür mekansal türeviyle ilgililer. Resimlerden, heykellerden veya diğer sanat eserlerinden örnek verebilir misiniz?

PROBLEMLER

1. İki proton arasındaki kütleçekimi kuvvetinin büyüklüğü $F_G = G\, m^2/r^2$; burada G kütleçekimi sabiti, m_p protonun kütlesi, r de protonların arasındaki mesafe. İnce yapı sabiti gibi boyutsuz bir kütleçekimi bağlanma sabiti tanımlayıp hesaplayın. Hesaba kattığınız bütün sabitlerin değerlerine bakın. Bilimsel gösterim kullanın, sonucunuzun hassasiyeti 3 anlamlı basamak derecesinde olsun. Bulduğunuz sonucu elektromanyetik kuvvet için bulduğumuz ince yapı sabiti ile karşılaştırın:

Kütleçekimi, elektromanyetizmadan daha mı güçlü, daha mı zayıf?

2. Planck ölçekleriyle ilgili problemler (C. Saçlıoğlu):
   Aşağıdaki problemlerin amacı, boyut analizi kullanarak temel bir kütleyi yani Planck kütlesi m_{PL}'yi, temel bir zaman ölçeğini yani Planck zamanı t_{PL}'yi ve temel bir uzunluk ölçeği olan Planck uzunluğu l_{PL}'yi, üç temel sabit olan G, $\hbar$ ve c üzerinden türetmek.

   (a) G, $\hbar$ ve c'nin boyutları neler?

   (b) $m_{PL} = G^x \hbar^y c^z$. Boyut analizi kullanarak x, y, z sayılarını bulun. Bunu yapmak için, G, $\hbar$ ve c'nin boyutlarını M , L ve T'nin kuvvetleri cinsinden yazıp, toplam boyutun sol taraftaki gibi M yani M^1 olduğunu düşünürsünüz.

   (c) Planck kütlesi m_{PL}'yi kilogram cinsinden hesaplayın. Bunu protonun kütlesiyle karşılaştırın.

   (d) G, $\hbar$ ve c'nin kuvvetleri cinsinden Planck zamanı t_{PL}'yi türetin ve değerini saniye cinsinden hesaplayın.

   (e) G, $\hbar$ ve c'nin kuvvetleri cinsinden Planck uzunluğu l_{PL}'yi türetin ve değerini metre cinsinden hesaplayın.

   Bu türettiğiniz şeyler hem kütleçekiminin hem de kuantum mekaniğinin önemli olduğu kütle, uzunluk ve zaman ölçekleridir. Bu ölçekler, Büyük Patlama'dan sonraki ilk zamanlar için, temel parçacık fiziği için geçerlidir. Planck ölçeklerini hesap edebiliyor olsak da, bu ölçülerde neler olduğunu anlayabilmemiz için kütleçekimi (genel görelilik) ile kuantum mekaniğinin uzlaştırılması gerekiyor. Bu hâlâ çözülememiş olan temel bir problem.

3. Newton'un Kütleçekimi Kanunu, m_1 ve m_2 kütleli iki cisim arasındaki F kuvvetini kütleler ve iki cismin arasındaki r uzaklığı cinsinden şöyle veriyor:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

   Burada G evrensel kütleçekimi sabiti. G'nin boyutlarını kütle, uzunluk ve zaman cinsinden bulup, SI sistemine göre birimlerini verin.

4. Hooke Kanunu: Bir kütle bir yaya bağlanmış. Yay, kütlenin denge konumundan çekildiği ya da itildiği mesafe x ile doğrudan orantılı bir kuvvet uyguluyor: $F = -kx$. Burada x denge noktasından ölçülen konum. Yay sabiti k'nın boyutlarını kütle, uzunluk ve zaman cinsinden bulup, birimlerini SI sistemine göre gösterin.

5. Çin Seddi'nin uzunluğu 6700 km. Çin'in alanını kabaca tahmin edin. Çin'in diğer sınırlarının ve deniz kıyılarının toplam uzunluklarının da Çin Seddi kadar olduğunu farz edin.

6. q_1 yükünün q_2 yüküne d mesafesinden uyguladığı kuvvet:

$$F = \frac{Kq_1q_2}{d^2}$$

SI sisteminde K genellikle bir başka sabit olan ϵ_0 ("epsilon sıfır" diye okunur) cinsinden, $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$ diye tanımlanır. K ve ϵ_0'un boyutlarını ve SI sistemine göre birimlerini bulun.

7. Doğu Anadolu'da $2{,}5 \times 10^5$ km^2 büyüklüğünde bir alan, yılda 500 kg/m^2 yağış alıyor. Eğer bu yağış yıl boyunca 10 nehre eşit olarak akıyorsa, her nehrin ton/s cinsinden *akış hızı* nedir? Eğer bu nehirlerden birinin, bir köprünün altındaki derinliği 1 m, genişliği de 50 m ise, bu köprünün altından her saniye akan su miktarı, kg/m^2/s biriminden nedir? [Not: Buna *akı* denir]

8. Şu iki vektörü ele alın:

$$\mathbf{P1} = (-2,\ 1{,}2) \qquad \mathbf{P_2} = (1,\ -2{,}2)$$

Bunları bulun:

(a) $\mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2}$

(b) $|\mathbf{P_1}|$ ve $|\mathbf{P_2}|$

(c) $\mathbf{P_1}$ ile $\mathbf{P_2}$ arasındaki açı

(d) $\mathbf{P_1} \times \mathbf{P_2}$

(e) $\mathbf{P_2} \times$ P1

9. Yukarıdaki problemi (8. Problem) şu değerler için çözün:

$$\mathbf{V_1} = (2,\ 2{,}1) \qquad \mathbf{V_2} = (1,\ 2{,}1)$$

10. Bir proton, $q = 1{,}6 \times 10^{-19}C$ (Coulomb) yük, $\mathbf{v} = 3 \times 10^5$ m/s $\mathbf{i}$ hız ile $\mathbf{B} = 10^8 T$ (Tesla) ($\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$) manyetik alanın olduğu bölgeye giriyor.

(a) Bu proton üzerindeki F kuvveti nedir? [Lorentz kuvvetini hatırlayın.]

(b) Bu kuvvetin büyüklüğü nedir?

Not: Tesla ve Coulomb doğru SI birimleridir, yani birimleri çevirmekle uğraşmanıza gerek yok. Bulacağınız sonuç, doğru SI birimi olan Newton (N) cinsinden olacak.

5
Hareketi Nasıl Tanımlarız?

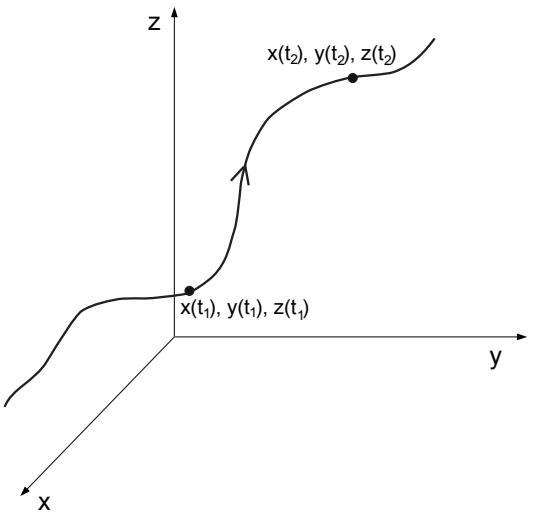
Gündelik deneyimlerimizle tanıdığımız, bu deneyimlere dayanan klasik fiziğin alanında olan nesneler söz konusu olduğunda, bir nesnenin zamanın her ânında nerede olduğunu belirleyebiliyoruz. Eğer bu nesne bir nokta olarak tanımlanabilecek kadar "küçük" ise, bulunduğu yer onun üç boyutlu uzaydaki koordinatlarına (x, y, z) göre belirtiliyor. Bu koordinatlar, bir koordinat sistemine göre ölçülen birtakım sayılar. Zaman geçtikçe nesne (bir "noktasal parçacık") farklı noktalarda olacak; t_1 ânında (x_1, y_1, z_1)'de, sonra t_2'de (x_2, y_2, z_2)'de, ardından t_3'te (x_3, y_3, z_3)'te, ve bu böyle gidecek. Bunların hepsini ölçebilir ve hareketi, nesnenin izlediği yolu, ölçümleri yaptığımız t_i zamanlarına karşılık gelen $x(t_i)$, $y(t_i)$, $z(t_i)$ koordinatlarına sahip bir dizi nokta olarak kaydedebiliriz (Şekil 5.1'e bakın). İlke olarak, bu ölçümler istediğimiz sıklıkta yapılabilir ve parçacığın hareketini temsil eder.

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ fonksiyonları bize parçacığın *yol*'unu verir. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$'nin sayısal değerleri koordinat sistemine bağlı olacaktır. $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ fonksiyonlarını üç boyutlu uzayda saptayarak nesnenin izlediği gerçek yolu bulmuş oluruz, bu da basit veya karmaşık bir tür eğridir. Bu eğri, cismin yoludur, ki bu elbette koordinat sistemine bağlı değildir.

Parçacık hareketine devam ediyor, yolunun üstündeki btün noktalardan geçiyor. Hareket aslında bundan biraz daha fazlası demek: *Nesnenin ne kadar hızlı hareket ettiğini de ölçebiliyoruz*. Aynı yörünge üzerinde sonsuz sayıda hareket

Sorular

- Nesne bir nokta ile ifade edilebilecek kadar "küçük" mü?
- "O kadar küçük" ne demek?
- Eğer nesne küçük değilse hareketini nasıl tanımlarız?
- Bir nesneyi parçalara nasıl ayırırız?
- Peki ya tek parça, katı bir nesne söz konusuysa? Ya da bir akışkan?



Şekil 5.1: Bir nesnenin üç boyutlu uzayda izlediği yol.

hayal edebiliriz, bunların her biri, zamanın bir fonksiyonu olan farklı birer sürat dizisiyle birbirinden ayrıdır.

Kinematiğin amacı, parçacığın *nasıl* hareket ettiğini tanımlamaktır. Bunun için önce hareketi tanımlayacak dili oluşturacağız. Bize gereken matematiği, yani *türev ve integral hesabını (basit kalkülüsü)* kullanacağız. Sonra *nedenlere* yani *dinamiğe* geçeceğiz: *Kuvvetler* hareketi nasıl belirliyor, bir şeyler başka şeyleri nasıl etkiliyor, kuvvetler neler, gibi sorular soracağız.

Parçacığın hareketini tek boyutta düşüneceğiz. Tek boyut hem basit, hem de yeterli: Tek boyutlu hareketi anlatan $x(t)$'yi nasıl ele alacağımızı öğreneceğiz. Bunu anlarsak üç boyutlu hareketlerin en karmaşığını bile, aynı şeyden biraz daha yaparak yani $y(t)$ ve $z(t)$'yi ele alarak anlayabiliriz.

5.1 ORTALAMA HIZ

Parçacık, t_1 zamanında $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ noktasında, t_2 zamanında ise $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktasında. Eğer bunların hepsini biliyorsak, parçacığın bu iki nokta arasındaki ortalama hızının x yönünde $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ olduğunu, y ve z yönlerinde de böyle olduğunu biliyoruz demektir.

$$v_x = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} \qquad v_y = \frac{(y_2 - y_1)}{(t_2 - t_1)} \qquad v_z = \frac{(z_2 - z_1)}{(t_2 - t_1)} \tag{5.1}$$

Klasik Mekanik ve Kuantum Mekaniği

Gündelik deneyimde ve klasik mekanikte hem x hem de v'yi her zaman beraber ölçebiliyoruz. Fakat kuantum mekaniğinde iş değişiyor! Atom fiziği gibi küçük ölçeklerde ve genel olarak maddenin atom özelliklerinden kaynaklanan özellikleri için, deneyler "parçacıkların" aynı zamanda "dalga" olduğunu gösteriyor. Bunların hareketini aynı anda hem kesin bir konum hem de kesin bir hız olarak tanımlamak mümkün değil. Bunu daha sonra, kuantum mekaniğini ve atomun yapısını işlerken tartışacağız. Şimdilik, noktasal parçacık, konum ve hız gibi tanıdık kavramlara dönüyoruz, bunların çoğu durum için büyük bir kesinlikle geçerli ve uygulanabilir olduğunu, ama doğanın bazı çok önemli ve ilginç alanlarında uygulanamadıklarını akılda tutmak kaydıyla.

Böylece (ortalama) hız vektörünü bulduk: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.
Parçacığımız, x yönünde, hızlı ya da yavaş, belki ileri geri gidip gelerek hareket ediyor: Parçacığın x koordinatı sürekli değişiyor. t_1 ve t_2 zamanları arasında ortalama hız,

$$v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{5.2}$$

Fakat t_1 ve t_2 zamanları arasında parçacık bazen hızlı, bazen yavaş gidiyor. Parçacığın t zamanındaki hızını bulmak için t zamanındaki konumunu, çok ama çok çok kısa bir Δt zaman aralığı sonraki konumuyla karşılaştırıyoruz, öyle ki bu iki konum *neredeyse aynı anda* ölçülüyor. Böylece t zamanında hızın ne kadar olduğuna dair çok daha hassas bir tahmin yapabiliyoruz:

$$v = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{5.3}$$

$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, parçacığın Δt kısa süresi içinde kat ettiği *azıcık mesafedir*. Bu $v = \Delta x/\Delta t$ yine bir ortalama hız, ama daha kısa bir zaman aralığı için. Mesela t, 10 s; Δt de 1 s olabilir. O zaman parçacığın konumunu 10 s'de ölçmüşüz, sonra 11 s'de bir daha ölçmüşüz demektir. 10 s ile 11 s arasında kat edilen mesafeyi, arada geçen zamana yani 1 s'ye bölünce, parçacığın 10 s ile 11 s arasındaki ortalama hızını bulmuş oluyoruz. Eğer bu ölçüm ve hesaplamaları $\Delta t = 0{,}01$ s için yapmış olsaydık, 10 s ile 10,01 s arasındaki ortalama hızı bulmuş olacaktık. Δt aralığı ne kadar kısa olursa, sonuç da $t = 10$ s'deki anlık hıza o kadar yakın olur. Bu yaptığımız, gerçek değere ulaşmak için giderek daha kısa, daha da kısa zamanlar için hızı *aynı şekilde hesaplamayı hayal etme* işi, matematikçilerin "*limit*" dediği kavramdır:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{5.4}$$

Pratikte, bu ölçümün en kısa zaman aralığı, parçacığın konumunu, mümkün olan en kesin ölçüm için belirlemeye harcanan zamandır. Belli bir deneyde, o deney için anlamlı ve mümkün derecede kısa aralıklarla yapılmış ölçümlerde nesnenin arka arkaya aldığı konumları karşılaştırmak anlık hızı belirlemek için yeterlidir. Bilimde limiti deneysel olarak almayız, ama bunu hayal edebiliriz.

Böylece, Δx, zamandaki küçük değişiklik (yani Δt) içinde konumda meydana gelen küçük değişikliktir. $\Delta x/\Delta t$ oranına "x'in t'ye göre değişme oranı" denir.

Bir parçacığın hızı onun konumunun zamana göre türevidir. Bunu göstermenin kısa bir yolu da var: "$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} [\Delta x/\Delta t]$" demek yerine "$v(t) = dx/dt$" deniyor.

Çözümlü Problem: Dolmuşun Hızı

Bir ilçeden il merkezine gitmek dolmuşla yaklaşık 20 dakika sürüyor. Dolmuşun kilometre sayacında görünen toplam mesafe 25 km.

(a) Dolmuşun ortalama hızı ne kadardır?

Ortalama hız: $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{25\ km}{20\ dak} = 1,25\ \mathrm{km/dak}$

Bu SI birimleriyle kaç olur?

$$v = \frac{25\ \cancel{km}}{20\ \cancel{dak}} \times \frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}} \times \frac{1\ \cancel{dak}}{60\ s} = 21\ m/s$$

(b) Dolmuş otobandan gidiyorsa bu hız makul bir hız mıdır?

Araçların hızını genellikle km/saat (km/sa) cinsinden düşünürüz, dolayısıyla bunun bir otoban için makul bir hız olup olmadığını anlamak icin önce 1,25 km/dakikayı km/saate çevirmemiz lazım:

$$v = 1,25 \frac{km}{\cancel{dak}} \times \frac{60\ \cancel{dak}}{1\ sa} = 75\ km/sa$$

Bu, hız sınırının 120 km/sa olduğu otoban için biraz yavaş. Fakat bunun bütün yolculuk için bir *ortalama hız* olduğunu unutmayın. Dolmuş il ve ilçe merkezlerinde, yerleşim alanın içine girdiği zamanlarda hızlı gidemez.

(c) Dolmuşun otobandaki ortalama hızını nasıl tahmin edebilirsiniz?
Yolculuğun yalnızca dolmuşun otobanda olduğu kısmını ele alabilirsiniz. Eğer yolun bu kısmına ait zaman ve mesafeleri kaydederseniz bulacağınız ortalama hız çok daha yüksek ve şoförün hız sayacında gördüğüne çok daha yakın olacaktır.

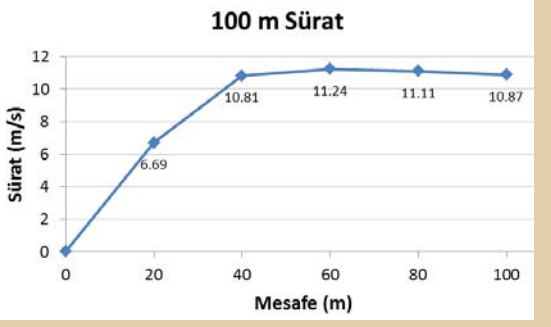
(d) Dolmuşun belli bir noktadan geçerken hızını hesaplamak için kolay bir yol bulabilir misiniz? (Şoföre sorarak değil!)
Mesafesini bildiğiniz herhangi bir şeyi kullanabilirsiniz: Mesafeleri belirten yol tabelaları, trafik işaretleri (servis noktasına . . . m.), uzunluğunu bildiğiniz bir tünel, köprü ya da büyük bina gibi. Sonra dolmuş o mesafeyi kat ederken ne kadar süre geçtiğini ölçersiniz (kol saatinizle).

Çözümlü Problem: Koşucunun Sürati

100 metre koşuda erkekler dünya rekoru 9,58 s. Usain Bolt'un 2011'de kırdığı bu rekor hâlâ aşılamadı. Bolt'un ortalama hızı m/s cinsinden kaçtır?

$$v = \frac{100\ m}{9.58\ s} = 10.4\ m/s$$

Bu yalnızca koşucunun ortalama hızı. Koşulan 100 metrenin herhangi bir yerindeki anlık hız bundan daha yüksek ya da daha düşük olabilir. Aşağıdaki grafik bir Olimpiyat finalinde ölçülmüş gerçek anlık hızları gösteriyor.*



Koşucunun en yüksek hızının 60 m. civarına ulaştığını görüyoruz. Haydi bunu bir çitayla karşılaştıralım. Çitalar 120 km/sa hızla koşabiliyor; dünyanın en hızlı insanını çita kovalasa, insanın çitaya yakalanmaması mümkün mü?

* http://www.brianmac.co.uk/sprints/'ten uyarlandı.

Karşılaştırma yapmak için insanın süratini km/saate çevirmemiz lazım:

$$v = 10,4\frac{\cancel{m}}{\cancel{s}}\ \frac{1\ km}{1000\ \cancel{m}}\ \frac{3600\ \cancel{s}}{1\ sa} = 37,4\ km/sa.....$$

Pardon ama hiç şansın yok...

t zamanındaki hız, *x*'in *t*'ye göre anlık değişme oranıdır, "*giderek kısalan* Δ*t* *için* Δ*x*/Δ*t limiti*" diye tanımlanır. Δ*x*/Δ*t*'in giderek kısalan zaman aralıkları için hesaplandığı bu limit işlemine de "*x'in t'ye göre türevini almak*" denir.

5.2 *dx/dt* NASIL HESAPLANIR?

dt çok kısa bir zaman aralığıdır; hayal edebileceğiniz en kısa aralıktan da daha kısadır, *limitte sıfıra gider*. Ama *dx* de bir o kadar küçüktür. En kısacık zaman aralığında parçacık çok çok hızlı gidiyor olsa bile miniminnacık bir mesafe kat eder.

Örnek: Bir parçacık *x* ekseni boyunca ilerliyor. Başlangıç noktasına *x* = 0 diyelim. Parçacık başlangıç noktasından, *t* = 0'da yola çıkıyor. Diyelim ki *x*(*t*) konumunu daha sonraki pek çok *t* ânında ölçtünüz, buna göre bir eğri çizdiniz ve $x(t) = Ct^2$ formülünün hareketi tanımladığını buldunuz. Buradaki *C* herhangi bir sabittir.
x (m cinsinden) ve *t* (s cinsinden) değerlerinden oluşan bir tablo çizerek, $x(t) = Ct^2$ formülünü gösterin, *C*'nin sayısal değeri sizin seçeceğiniz bir şey olsun. Şimdi *v*(*t*)'yi hesap edelim. Önce, *t* zamanı ile *t*+Δ*t* zamanı arasındaki ortalama hız:

$$x(t+\Delta t) = C(t+\Delta t)^2 = C(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) \qquad (5.5)$$

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = C(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) - Ct^2 \qquad (5.6)$$

$$\Delta x = C(2t\Delta t + (\Delta t)^2) \qquad (5.7)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = C(2t + \Delta t) \qquad (5.8)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2Ct \qquad (5.9)$$

$v(t) = dx/dt = 2Ct$'dir, çünkü limitte Δ*t*, 2*t*'ye kıyasla önemsenmeyecek kadar küçük bir değerdir!

Dolayısıyla *dx/dt* küçük bir sayının küçük bir sayıya bölümüdür; limitte sıfır bölü sıfır. Bunun değeri hesaplanabilir. Bu sadece *dx*'in *dt*'yle ilişkisine bağlıdır; mesele, zaman aralığı kısaldıkça mesafenin tam olarak nasıl kısaldığıdır. İşte bütün bu bilgiler, *x*(*t*) fonksiyonunda vardır. Eğer herhangi bir anda parçacığın nerede olduğunu bulabilirseniz herhangi bir andaki hızını da hesap edebilirsiniz.

Şimdi bu reçeteyle *v*(*t*)'yi nasıl hesaplayacağımızı biliyoruz. Peki ne zaman bir hız hesaplayacak olsak bunların hepsini yapmamız mı lazım? Hayır. Her türlü fonksiyonun türevini bulmanın kuralları var. Bu kuralların hepsi türevin temel

1. Eğer $X(t) = Cx(t)$, C de bir sabit ise, $dX/dt = Cdx/dt$'dir.
2. $dC/dt = 0$.
3. Eğer $x(t) = u(t) + s(t)$ ise, yani mesela $x(t) = 3t^2 - 1/t$ gibiyse, o zaman $dx/dt = du/dt + ds/dt$ olur.
4. Eğer $x(t) = u(t)s(t)$ ise, yani $x(t) = t^{1/2} \times (t^3 + 7/t)$ gibiyse, $dx/dt = u(t)\ ds/dt + du/dt\ s(t)$'dir.
5. Eğer x, diyelim ki y'nin bir fonksiyonu olarak, $x = x(y)$ diye veriliyorsa ve y de t'ye bağlıysa $y = y(t)$, yani $x = x(y(t))$ ise, türev basit bir *zincir kuralı* ile hesaplanır:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{5.10}$$

6.

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} \tag{5.11}$$

tanımından çıkıyor. En çok kullanılan, en önemli (ve çoğu zaman da basit olan) fonksiyonların türev kurallarını bilince sonuçları kolayca bulabiliriz. Türev almanın başka bazı kuralları da aşağıda veriliyor. Bunları *dx/dt*'nin temel tanımından türetin. Bu kuralları anlayın ve kullanın; matematik derslerinde bunlar hakkında daha fazlasını da öğreneceksiniz.

x(*t*)'den *v*(*t*)'yi hesaplamayı öğrendik. Şimdi tabii ki hızın bir andan bir âna nasıl değiştiğini de bulabiliriz. Hızın birim zaman başına değişmesine, yani hızlanma veya yavaşlamaya *ivme* denir:

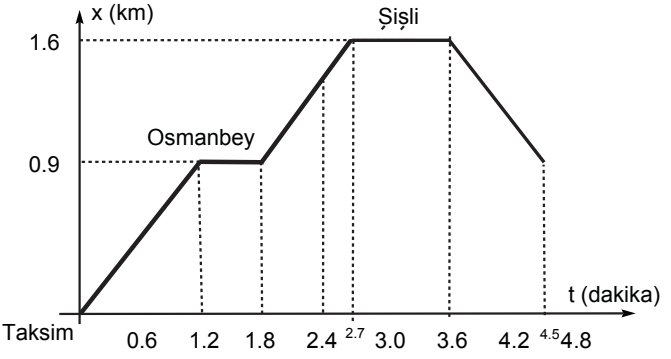
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \tag{5.12}$$

Şimdi örneğimize geri dönelim $x(t) = Ct^2$ şeklinde değişen bir harekette, hız $v(t) = 2Ct$ şeklinde değişiyor. Öyleyse ivme nedir?

Türev kurallarımıza göre $a(t) = dv/dt = 2C$. Yani $x(t) = Ct^2$ iken, ivme sabit demektir. İvmenin sabit olduğu bir hareket örneği, kütleçekiminin etkisi altındaki harekettir. Dünya'nın yüzeyine yakın yerlerde kütleçekimi ivmesi sabittir (ivme yaklaşık olarak neredeyse sabittir ama, yüzeye ne kadar yakın olduğunuza göre birazcık değişiklik gösterir).

PROBLEMLER

1. $t = 0$'da İstanbul'da Taksim metro istasyonundasınız. Şişli'ye gidiyor ve sonra Osmanbey'e geri dönüyorsunuz. Şekilde yolculuğunuzun konum–zaman grafiği görülüyor.



   (a) Taksim'le Şişli arasında trenin ortalama hızı ne kadardır?

   (b) Taksim'le Osmanbey arasındaki bütün yolculuk için ortalama sürat kaçtır?

   (c) Trenin hız-zaman grafiğini çizin.

   (d) Trenin ivme-zaman grafiğini çizin.

2. Eğer $x(t) = Ct^n$ ise $v(t) = Cnt^{(n-1)}$ olduğunu gösterin.

3. Bir çocuk elindeki topu dikey olarak havaya atıyor. Topun her andaki yüksekliğini şu fonksiyon tanımlıyor:

$$h = 20t - 5t^2$$

   h'nin birimi metre, t'ninki saniyedir.

   (a) Topun t zamanındaki hızı $v(t)$ nedir?

   (b) Topun t zamanındaki ivmesi $a(t)$ nedir?

(c) 1 *s*, 2 *s*, 3 *s* zamanlarında yükseklik, hız ve ivme ne kadardır?

4. Bir nesnenin hareketi, x yönündeki hareket ve y yönündeki hareket olarak şu şekilde bölünebiliyor:

$$x = 15t \qquad y = 20t - 5t^2$$

Hesaplayın:

$\frac{dy}{dx} = ?$

İpucu: $\frac{dy}{dx}$'i iki şekilde hesaplayın:

(a) "zincir kuralını" kullanarak

(b) önce $y(t)$'yi $t(x)$ cinsinden ifade edip sonra $\frac{dy}{dx}$ türevini alarak.

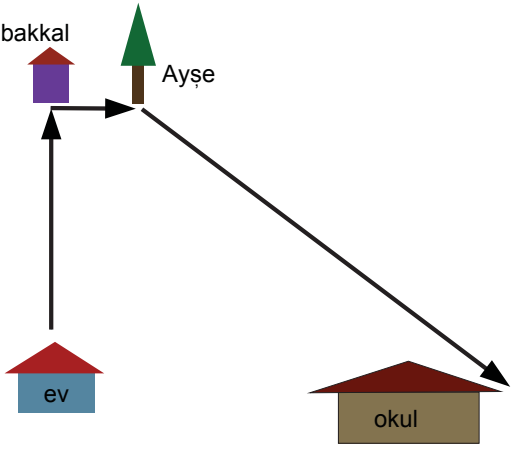
5. Aşağıdaki durumlar için dx/dt'yi bulun:

(a) $x(t) = f(t) + g(t)$

(b) $x(t) = f(t)g(t)$

(c) $x(t) = f(g(t))$

burada $f(t) = t^{1/2}$ ve $g(t) = 2t^3$'tür.



6. Sabahları evden çıkıp bakkala gazete almaya gidiyorum. Bakkal evimin 500 m kuzeyinde. Oradan, bakkalın 200 m doğusundaki otobüs durağına gidiyorum. Arkadaşım Ayşe'yle buluşuyorum. Beraber, otobüsün yaklaşık 1 km güneydoğusunda bulunan okulumuza doğru yürüyoruz.

(a) Evimden okula ne kadar mesafe yürüyorum?

(b) Bu yolculuğum yaklaşık yarım saat sürdüğüne göre benim ortalama hızım kaç?

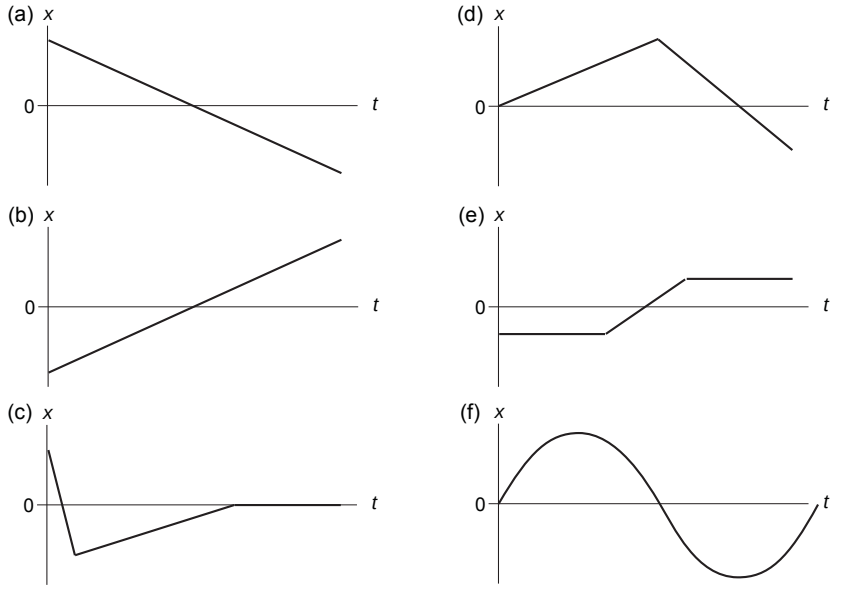
(c) Ortalama hız vektörüm ne?

7. Yatay düzleme θ açısıyla fırlatılan bir taşın konum vektörü:

$$\mathbf{r} = 5(\cos\theta)\, t\, \mathrm{i} + (5(\sin\theta)\, t - 5t^2)\, \mathrm{j} \quad m$$

(a) $\mathbf{v}(t)$ hızını bulun.
(b) Taşın ilk hızını hesaplayın.
(c) İvme $\mathbf{a}(t)$'yi bulun.
(d) Taşın izlediği $y(x)$ yolunu bulun.
(e) $v(t)$ süratini bulun.

8. Aşağıdaki şekilde 6 farklı konum (x) – zaman (t) grafiği var. Bunların her biri için birer hız (v) - zaman (t) grafiği çizin.



6
Parçacığın Nerede Olduğunu Nasıl Bulacağız?

Farz edelim ki bir parçacık $t = 0$ zamanında $x(0)$ noktasında, ve $v(0)$ hızıyla gidiyor. Bu noktadan itibaren $v(t_n)$ hızının, $t_n = n\Delta t$ zamanlarında sık aralıklarla yapılmış gözlemleri elinizde var.

En son t zamanında parçacık nerede olur?

Bisikletle düz bir çizgi üzerinden gidiyorsunuz. Bisikletinizde bir hız göstergesi de var. Hızınızı düzenli olarak, Δt zaman aralıklarıyla ölçüyorsunuz. Nerede olduğunuzu öğrenmenizin başka hiçbir yolu yok. (Bu bilimsel bir deney olsaydı çok uyduruk bir deney tasarımı olduğunu söylerdik. Siz bunu kafanızda, hayalî olarak yapın, öğrenmenin hatırına!) Nerede olduğunuzu hesaplayabilir misiniz? $x(0)$ başlangıç noktasından yola çıkmıştınız. Sonra bir Δt zaman aralığının ardından, t_1 zamanında şuradasınız:

$$x(t_1) = x(0) + v(0)\Delta t \tag{6.1}$$

(*Yaklaşık olarak böyle*: C¸ ünkü Δt zaman aralığı içinde hız başlangıçtaki $v(0)$ değerine göre değişmiş olabilir. Δt aralığınız yeterince kısaysa gerçeğe daha yakın bir hesap yapmış olursunuz.) Sonra, t_1 zamanından t_2 zamanına, yaklaşık olarak $v(t_1)$ hızıyla ilerlediniz. Böylece t_2 zamanında şuradasınız:

$$x(t_2) = x(t_1) + v(t_1)\Delta t = x(0) + v(0)\Delta t + v(t_1)\Delta t \tag{6.2}$$

t_n zamanından t_n+1 zamanına kadar, $v(t_n)\Delta t$ kadarcık daha yol alıyorsunuz. Yani,

$$x(t_{n+1}) = x(0) + v(0)\Delta t + v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + ... + v(t_n)\Delta t \tag{6.3}$$

t zamanına kadar gidilen toplam mesafeyi bulmak istiyorsanız, 0 ile t arasında hızı birçok defa, diyelim $\Delta t = t/N$ düzenli zaman aralıklarıyla ölçersiniz. O zaman,

$$x(t) - x(0) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n\Delta t)\Delta t \tag{6.4}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} v(n\Delta t)\Delta t$$

Bu gösterim, "$n = 0$'dan $n = N - 1$'e kadar n'nin alacağı bütün değerler için $v(n\Delta t)\Delta t$ toplamı" anlamına gelir.

6.4 denkleminin açık hali şöyle:

$$x(t) - x(0) = v(0)\Delta t + v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + ... + v(t_N - 1)\Delta t$$

Başka bir deyişle, 0 zamanından t zamanına kadar kaydettiğiniz mesafe, arada attığınız küçük adımların toplamıdır. Mesafeyi bu küçük adımlarla ölçmeniz gerekir; çünkü bu zaman diliminin her ânında hız farklı olabilir. Zaman aralıklarınızı ne kadar kısaltırsanız hesabınızın kesinliği o kadar artar. Böylece;

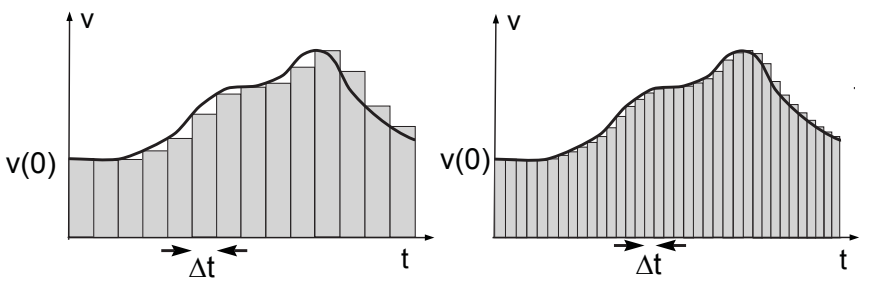
$$x(t) - x(0) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} v(n\Delta t)\Delta t \tag{6.5}$$

$\Delta t = 0$ limitinde değerlendirilen böyle bir toplama *integral* deniyor. Bunun da özel bir gösterimi var:

$$x(t) - x(0) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} v(n\Delta t)\Delta t \equiv \int_0^t v(t')dt' \tag{6.6}$$

Şimdi hızı zamanın bir fonksiyonu olarak gösteren bir grafiğe bakın (Şekil 6. 1). $x(t)$ konumunun $v(t)$ eğrisiyle geometrik olarak basit bir ilişkisi var:

$x(t) - x(0)$, 0 ile t arasında $v(t)$ eğrisinin altında kalan alandan başka bir şey değil.



Şekil 6.1: Hız grafiği v(t) eğrisinin altındaki alan bize $x(t) - x(0)$'ı veriyor. Sol taraftaki çizimde x(t) − x(0)'ı hesaplarken kullanılan Δt zaman aralıkları daha uzun. Sağdaki çizimde daha kısa bir Δt kullanılıp $x(t) - x(0)$ daha kesin olarak ölçülmüş.

Soru

$x(t) - x(0)$ nasıl hesaplanır?

Şimdi, $v(t) = dx/dt$. Dolayısıyla, eğer $v(t)$'yi biliyorsanız ve $x(t)$'yi bulmak istiyor- sanız, elinizdeki problem türev almanın tersidir:

Hangi $x(t)$ fonksiyonunun türevi, bu verilen $v(t)$'dir?

O zaman fonksiyonlar ve türevlerini gösteren tablonuza bakarsınız, "türevler" sütununda elinizdeki $v(t)$'yi ararsınız. Sonra da türevi bu olan $x(t)$ fonksiyonunu okursunuz. Bazen tabloda bilinen bir fonksiyon bulursunuz. (Bazen de bulamazsınız: o integrali daha önce kimse almamıştır. O zaman oturup matematik yöntemleriyle, akıllıca numaralarla bu işi yapmanız veya yukarıdaki integral tanımına dayanan bilgisayar programlarına yaptırmanız gerekir.)

Örnek: Diyelim $v(t) = At^n$ olsun. Kelimelerle söyleyecek olursak, t zamanındaki hız, A kere t üzeri n kadardır. Zamanın bir fonksiyonu olarak konum nedir? Cevap,

$$x(t) = A\frac{t^{n+1}}{(n+1)} + C$$

Burada C bir sabittir.
Neden?
Çünkü eğer bu $x(t)$'nin türevini alırsam,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = (n+1)A\frac{t^n}{(n+1)} + \frac{dC}{dt}$$

Burada üslü bir t^n sayısının türevini alma kuralı konusunda daha önce türettiğimiz formül ile diğer basit türev kurallarını kullandık. dC/dt sıfırdır, çünkü C değişmez, C bir sabittir. O zaman $x(t) = At^{n+1}/(n + 1) + C$'nin türevi $v(t) = At^n$ olur.

Dikkat edin, $v(t)$'de görülmeyen C, $x(t)$'de bulunmak zorunda. Başka başka C sabitlerinin olduğu bütün $x(t)$ formülleri aynı $v(t)$'yi verir.

Eğer bu $v(t) = At^n$ hız kuralıyla parçacığımızın t_1 zamanın- dan t_2 zamanına ne kadar mesafe kat ettiğini bulmak istersek, t_1 ve t_2 zamanları arasında $v(t)$'nin integralini almamız gerek:

$$x(t_1) - x(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} x(t_1) - x(t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} At^n dt \\ &= \left[\frac{At_2^{n+1}}{(n+1)} + C\right] - \left[\frac{At_1^{n+1}}{(n+1)} + C\right]. \end{aligned} \tag{6.8}$$

C sabiti aradan çıkıyor ve bir belirsizlik kalmıyor.

$$x(t_1) - x(t_2) = \frac{At_2^{n+1} - At_1^{n+1}}{(n+1)}. \tag{6.9}$$

Çözümlü Problem: Hızlanan Araba

Bir yarış arabası 0'dan 100 km/saate 2,5 saniyede çıkıyor.

(a) Ortalama ivme ne kadar (SI birimleriyle)?

Önce, km/sa'i hızın SI birimleri olan m/s'ye çevirmemiz lazım.

$$100\ \frac{km}{sa} = 100\ \frac{\cancel{km}}{\cancel{sa}}\ \frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}}\ \frac{1\ \cancel{sa}}{3600\ s} = 27,8\ m/s$$

Böylece, ortalama ivme:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{(27,8 - 0)\ m/s}{2,5\ s} = 11,1\ m/s^2$$

(b) Bu süre içinde ivmenin sabit olduğunu farz edersek, araba 2,5 s'de ne kadar mesafe kat eder?

Burada $a(t)$ = 11, 1 m/s^2 olduğunu bulmuştuk, $v(t)$ hız fonksiyonu ise şöyle bulunabilir:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')dt' = (\cancelto{0}{v(0)} + 11,1\ t)\ m/s = 11,1\ t\ m/s$$

Burada $t = 0$ ânında arabanın hızının 0 olduğunu kullandık. Bundan sonra, mesafe fonksiyonu $x(t)$ de şöyle bulunur:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')dt' = \cancelto{0}{x(0)} + \int_0^t 11,1t'\ dt' = \frac{11,1t^2}{2}$$

Burada $t = 0$ ânında arabanın konumunu 0 olarak aldık. Bulduğumuz bu iki fonksiyonla arabanın t'nin her anı için tam hareketini biliyoruz:

$$x(t) = \frac{11.1t^2}{2}\ m$$
$$v(t) = 11.1t\ m/s$$

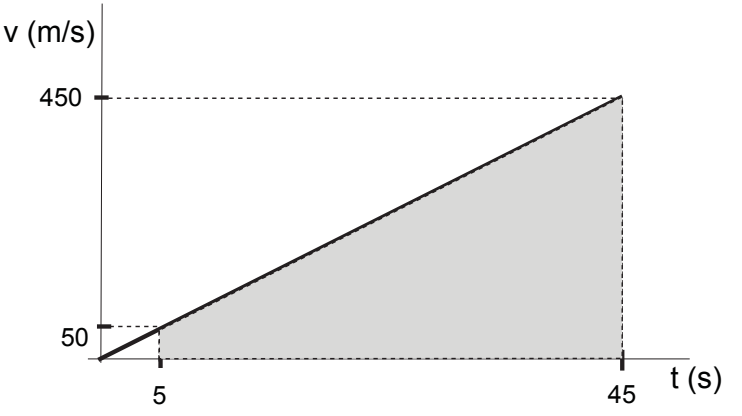
Böylece, arabanın $t = 2{,}5$ s'de kat ettiği mesafe:

$$x(t = 2,5\ s) = \frac{11,1\ (2,5)^2}{2} = 34,7\ m$$

PROBLEMLER

1. Bir nesnenin hızının zamanla şu şekilde değiştiğini farz edin:

$$v(t) = 10\ t\ m/s.$$



Bu nesne $t_1 = 5$ s zamanından $t_2 = 45$ s zamanına kadar ne kadar yol alır? Cevabı aşağıdaki yöntemlerle bulun:

(a) t_1'den t_2'ye $\Delta t = 5$ s ile, denklem (6.4)'ü kullanarak, yaklaşık olarak;

(b) $\Delta t = 1$ s ile, yine denklem (6.4)'ü kullanarak, gerçeğe daha yakın bir sonuç bularak;

(c)

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

integralini çözüp, tam olarak;

(d) $v(t)$ grafiğinde $t = 5$ s ile $t = 45$ s arasında alttaki alanı hesaplayıp, tam olarak,

2. Bir nesne $z(0) = 3$ m başlangıç konumundan, $v_z(0) = 10$ m/s başlangıç hızıyla dikey olarak atılıyor. Kütleçekiminden kaynaklanan ivme $a_z(t) = g \cong -10$ m/s^2'dir. İntegral kullanarak aşağıdakileri bulun:
   (a) daha ileri herhangi bir t zamanı için $v_z(t)$ hızı.
   (b) daha ileri herhangi bir t zamanı için $z(t)$ yüksekliği.
   (c) $t = 1$ s'de nesne nerede ve hızı ne kadar? Peki ya $t = 2$ s'de?

3. $z(0) = 0$'dan başlayan, başlangıç hızı $v_z(0) = 100$ m/s olan dikey bir hareket için, $a_z(t) = g \cong -10$ m/s^2 kabul ederek, integral kullanarak:
   (a) daha ileri herhangi bir t zamanı için $v_z(t)$ hızını bulun.
   (b) daha ileri herhangi bir t zamanı için $z(t)$ yüksekliğini bulun.
   (c) $t = 0$'dan $t = 20$ s'ye kadar zamanın fonksiyonu olarak hız grafiği çizin.
   (d) İntegralin grafik özelliğini, yani $v_z(t)$ çizgisinin altındaki alanın $v_z(t)$'nin integrali $z(t)$'nin alanını vermesini kullanarak, $t = 5, 10, 15, 20$ s için $z(t)$ yüksekliğini bulun.

4. **Eğik Atış:** Dünya'nın yüzeyine yakın yerlerde bütün nesneler, neredeyse sabit olan kütleçekimi ivmesi $\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{k}$ ile aşağı doğru ivme kazanırlar. Bir eğik atış, $\mathbf{r}(0) = h\mathbf{k}$ başlangıç konumundan, $\mathbf{v}(0) = v_x(0)\mathbf{i} + v_z(0)\mathbf{k}$ başlangıç hızıyla başlıyor. $\mathbf{i}$, yatay olan x yönündeki birim vektör, $\mathbf{k}$ de yukarı doğru dikey giden z yönündeki birim vektör.
   (a) İvmenin integralini alarak $v_z(t)$ dikey hızını bulun.
   (b) $v_z(t)$ dikey hızının integralini alarak $z(t)$ yüksekliğini bulun.
   (c) $v_x(t)$ yatay hızını bulun.
   (d) Eğik atışla t zamanı içinde kat edilen $x(t)$ yatay mesafeyi bulun.
   (e) z'yi x cinsinden ifade edin.
   (f) Kendi seçeceğiniz h, $v_x(0)$, $v_z(0)$ değerleri ve $g \cong 10$ m/s^{-2} ile $z(x)$ yol grafiğini çizin.

5. **Gelibolu:** Birinci Dünya Savaşı'nda Çanakkale cephesinde (Gelibolu'da) "yeni" teknoloji ürünü silahlar kullanıldı. Bu silahlar $v_0 = 800$ m/s başlangıç hızıyla mermi atıyordu. Belli uzaklıktaki bir hedefi vurmak için daha dar bir açıyla, daha hızlı mermiler gerekir. Böylece mermiler savaş alanını daha alçaktan kat etti ve can kaybı arttı. Bu nasıl oldu?
   (a) v_0 hızıyla ve yatay düzleme θ açısıyla atılan bir kurşunun, azami yüksekliği h'ye ulaşması ne kadar zaman alır?
   (b) Azami yükseklik h ne kadardır?

(c) v_0 ve θ açısı cinsinden, kurşunun menzili D nedir?

(d) D menziline erişmek için gereken θ açısını, D, g ve v_0 cinsinden ifade edin. θ'nın çok küçük olduğunu farz edin ve küçük açılar için $sin(2\theta) = 2\theta$ yaklaşık bilgisini kullanın (θ radyan cinsinden).

(e) h'yi D, g ve v_0 cinsinden ifade edin.

(f) $D = 1200$ m, $v_0 = 800$ m/s ve $g = 10$ m/s^2 değerleri ile h'yi bulun.

6. Küçük bir uçak 100 m/s hızıyla uçuyor. Arkadan esen âni bir rüzgâr uçağa 5 saniye boyunca $a = 5t$ m/s^2 ivme kazandırıyor.

(a) Uçağın yeni hızı kaçtır?

(b) Uçak bu 5 saniyelik aralık boyunca ne kadar mesafe kat ediyor?

7. Ahmet'in arabası duran halden başlayarak düz bir çizgi üzerinde 10 saniye boyunca; zamanla değişen bir $a(t) = 2t/3$ m/s^2 ivmesiyle hızlanıyor.

(a) $t = 3$ s, 6 s, 9 s'de ivme kaçtır?

(b) $t = 3$ s, 6 s, 9 s'de m/s biriminde hız ne kadardır?

(c) $t = 3$ s, 6 s, 9 s'de arabanın kat ettiği mesafe ne kadardır?

(d) Ortalama ivme ne kadardır?

8. Aşağıdaki fonksiyon, akşam 5 ile 6 arasında Boğaz Köprüsü'nü geçmek üzere köprüye giren araç sayısını veriyor.

$$n(t) = 100 + 60\left(\frac{t}{60}\right)^2$$

burada t, dakika olarak, saat 5'ten itibaren geçen zaman. Saat 5 ile 6 arasında köprüden geçen toplam araç sayısı kaçtır?

9. Bir araba $t = 0$'da duran halden başlayarak düz bir yol üzerinde 1 dakikada 60 km/saat sürate ulaşıyor. İvme sabittir. Sonra araba 60 km/saat sabit hızla 10 dakika gidiyor. Ardından, hızlanırkenki ivmesiyle aynı değerde, fakat ters yönde bir ivme ile hız kaybediyor ve 1 dakika sonra duruyor.

(a) Hızlanırken ve yavaşlarkenki ivme m/dk^2 cinsinden ne kadardır?

(b) m/dk birimiyle $v(t)$ hızının $t(dk)$ zamanına göre grafiğini çizin.

(c) Arabanın kat ettiği toplam mesafeyi metre cinsinden, bu $v(t)$ grafiğinin altındaki alanı hesaplayarak bulun.

(d) $t = 0$ ile $t = 12$ dk arasında her zaman aralığı için $v(t)$ fonksiyonunu ifade edin.

(e) $v(t)$ fonksiyonunun integralini alarak arabanın kat ettiği toplam mesafeyi metre birimiyle hesaplayın.

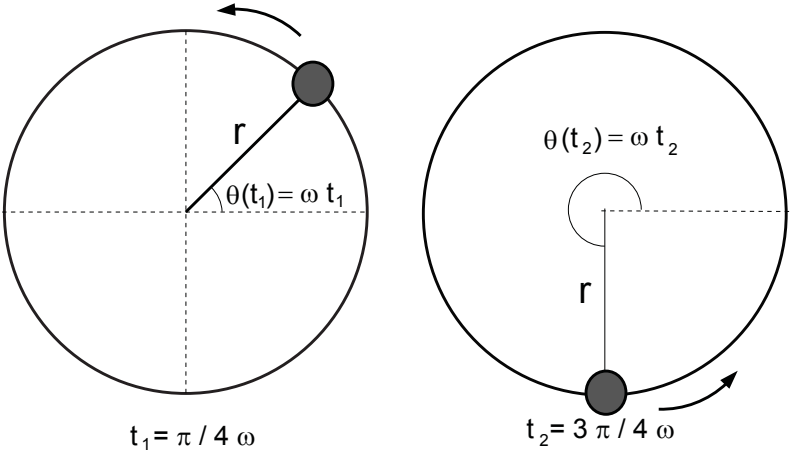
10. Bir uçak başlangıçta x yönünde yol alıyorsa, yani $\mathbf{v} = 100\ m/s\ \mathbf{i}$ ise, ve $t = 0$ zamanında rüzgâr, uçağa $\mathbf{a} = (0,\ 3t^2\mathbf{i} + 0{,}4t\ \mathbf{j})$ m/s^2 ivmesini kazandıracak şekilde esmeye başlarsa,

    (a) $t = 5$ s'de uçağın hızı kaçtır?

    (b) $t = 5$ s'de uçağın sürati ne kadardır?

    (c) $t = 5$ s'de ivmenin büyüklüğü ne kadardır?

7
Dairesel Hareket



Şekil 7.1

7.1 DÜZGÜN DAİRESEL HAREKET

Şekil 7.1 daire üzerinde hareket eden bir parçacığı gösteriyor. Parçacık *v sabit süratiyle* hareket ediyor. Sabit süratli dairesel harekete "*düzgün dairesel hareket*" denir. Bu örnekte, parçacık *saat yönünün tersine* hareket ediyor. Parçacığın pozitif x ekseninin tam üstünde olduğu zamanı $t = 0$ olarak seçelim. x ekseni üzerindeki başlangıç konumundan, saat yönünün tersine doğru ölçülen $\theta(t)$ "*açısal konumu*," parçacığın t zamanında daire üzerindeki konumunu verir. Parçacığın t süresinde

daire üzerinde aldığı mesafeyi, "*yay uzunluğu*" $s(t)$ olarak gösteririz. θ açısı için hangi birimleri seçeceğiz? ° işaretiyle gösterilen alışıldık derece biriminde, dairenin çevresinde tam bir dönüş 360°, dik açı da 90°'dir. Parçacığın daire üzerinde kat ettiği yay uzunluğu, θ açısıyla orantılı olarak artar. Yay uzunluğu, dairenin yarıçapı r ile de orantılıdır: Aynı θ açısı için, daha büyük bir daire üzerinde hareket eden bir parçacık daha uzun bir s mesafesi kat edecektir. Dolayısıyla, s = sabit $r\,\theta$'dır, orantı sabiti de θ için seçtiğimiz birimlere bağlıdır. θ için en basit birim, sabiti 1 olarak seçmekle elde edilir, böylece $s = r\theta$ olur. Daireyi tam olarak dolaşan yayın uzunluğu, yani dairenin çevresi, $s = 2\pi r$'dir, öyleyse θ için yeni birimimiz olan *radyan* ile bir tam dönüş (tur) şöyle olur:

$$2\pi\ rad(\text{radyan}) = 360^\circ, \qquad 1\ \text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Parçacık v sabit hızıyla daire üzerinde giderken $\theta(t)$ açısı da ω (omega) sabit oranında artar, buna *açısal hız* veya *radyan hız* denir:

$$\theta = \omega t \tag{7.1}$$

Bu bir hız; sadece sürat değil, çünkü bir yönü var. ω açısal hızı, hareket saat yönünün tersinde olduğu zaman, yani θ'nın arttığı yönde olduğu zaman pozitif olur; saat yönünde giden harekette ise ω negatiftir. Dairesel hareketi, verilen belli bir yönde, diyelim saat yönünün tersinde sayıyoruz; artık açısal hız ile açısal sürat arasında bir ayrım yapmayacağız. Açısal hız ω'nın birimi radyan/saniye. Kat edilen yay uzunluğu

$$s(t) = vt = r\theta(t) = r\omega t, \tag{7.2}$$

hız v'nin ω açısal hızıyla ilişkisi ise

$$v(m/s) = \omega(rad/s)\ r(m). \tag{7.3}$$

Parçacık x eksenindeki başlangıç konumuna bir P süresi ("*periyot*") sonra tekrar geliyor. Kapalı bir yörünge üzerindeki bütün hareketler gibi dairesel hareket de periyodiktir: Kendini tekrar eder, her P periyot (devir) süresinde aynı noktadan bir kere daha geçer, böylece hızı,

$$v = \frac{2\pi r}{P} \tag{7.4}$$

olur. Düzgün dairesel harekette sabit açısal hız ω da, rad/s birimiyle

$$\omega = \frac{2\pi}{P} \tag{7.5}$$

olur: Yani 2π radyanlık tam bir tur, P saniyelik bir periyotta tamamlanır.

Çözümlü Problem: Açısal Hız

Bir adam dairesel bir yol boyunca araba kullanıyor, kilometre sayacı 72 km/sa sabit hız gösteriyor. Adam turu 1 dakikada tamamlıyor.

1. Dairenin yarıçapı nedir? $\pi = 3$ kabul edin.

   Önce elimizdeki bilgileri sıralayalım: $v = 72$ km/sa, ve periyot $P = 1$ dk $= 60$ s. v'yi SI birimlerine çevirmemiz lazım:

$$v = 72\frac{\cancel{km}}{\cancel{sa}}\,\frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}}\,\frac{1\ \cancel{sa}}{3600\ s} = 20\ m/s$$

   Yarıçap r'nin v ve P ile $2\pi r = Pv$ şeklinde bir ilişkisi var, öyleyse:

$$r = \frac{Pv}{2\pi} = \frac{(60\ s)(20\ m/s)}{2\pi} = 200\ m$$

2. Arabanın açısal hızı ne kadar?

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{20\ m/s}{200\ m} = 0.1\ rad/s$$

3. Eğer bu araba aynı hızla, yarıçapı daha küçük olan bir daire üzerinde hareket ediyor olsa, arabanın açısal hızına dair ne söyleyebilirsiniz?

   Araba daha küçük daire üstünde hˆalˆa saniyede 20 m ile ilerliyor, fakat dairenin çevresi bu kez çok daha kısa olduğu için, 20 m yol dairenin daha büyük bir kısmını tarıyor. Demek ki arabanın bir saniyede aldığı açı daha büyük, dolayısıyla açısal hızı (saniye başına taranan açı) da büyük daireye göre daha yüksek.

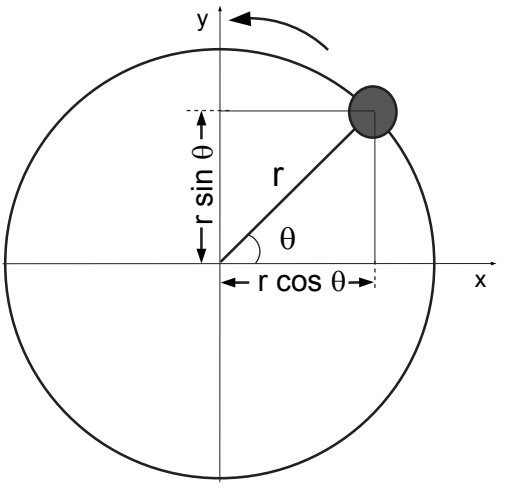
7.2 DÜZGÜN DAİRESEL HAREKETTE KONUM, HIZ VE İVME

Şekil 7.2'deki parçacığın konum vektörünü yazalım:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = r\cos(\omega t)\mathbf{i} + r\sin(\omega t)\mathbf{j}. \tag{7.6}$$

i ve **j**, sırasıyla x ve y yönlerindeki birim vektörlerdir. Hız vektörü, konumun türevi alınarak bulunur:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} = r\left[\frac{d\cos(\omega t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\sin(\omega t)}{dt}\mathbf{j}\right]. \tag{7.7}$$



Şekil 7.2

Burada daire üzerindeki hareket için *r*'nin sabit olmasını kullandık. Hız vektörünü tam olarak belirlemek için $d\cos(\omega t)/dt$ ve $d\sin(\omega t)/dt$'yi hesaplamak gerekir. Zaman geçtikçe açının sinüs ve kosinüsünün değişme hızı, *sinüs ya da kosinüsün, açının değişmesine bağlı değişme oranı kere açının zamanla değişme hızıdır*. Düzgün dairesel harekette $\theta = \omega t$ olduğunu dikkate alırsak, θ, sabit ω hızıyla değişir.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{7.8}$$

Böylece şunları elde ederiz:

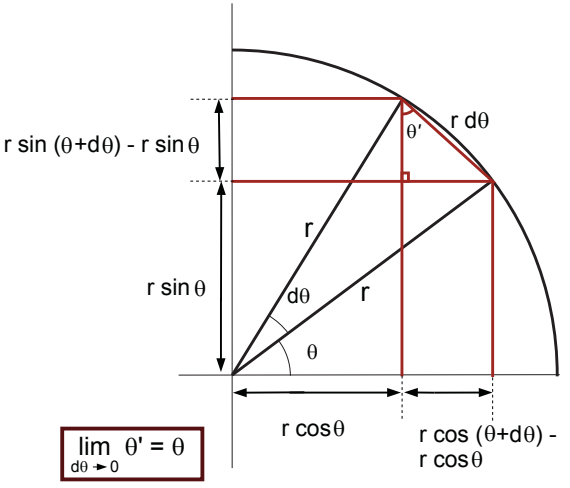
$$\frac{d\cos(\omega t)}{dt} = \left[\frac{d\cos(\omega t)}{d(\omega t)}\right] \cdot \left[\frac{d(\omega t)}{dt}\right] = \omega \left[\frac{d\cos(\omega t)}{d(\omega t)}\right] \tag{7.9}$$

$$\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \left[\frac{d\sin(\omega t)}{d(\omega t)}\right] \cdot \left[\frac{d(\omega t)}{dt}\right] = \omega \left[\frac{d\sin(\omega t)}{d(\omega t)}\right] \tag{7.10}$$

$\theta = \omega t$ açısının kosinüsünün ve sinüsünün, açı değiştikçe nasıl değiştiğini anlamamız lazım. Şekil 7.3'i kullanarak şu sonuçlara varıyoruz:

$$\frac{d\cos(\theta)}{d\theta} = -\sin(\theta) \tag{7.11}$$

$$\frac{d\sin(\theta)}{d\theta} = \cos(\theta) \tag{7.12}$$

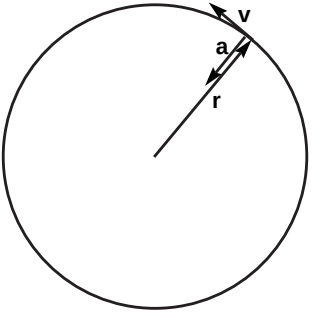


Şekil 7.3

Böylece önemli bir şeyi, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının türevini almayı öğrendik! Bu bilgiyi artık sadece dairesel hareket için değil başka konularda da kullanabiliriz. Şimdi dairesel hareketle devam edelim. Gördüklerimizin hepsini bir araya getirince, düzgün dairesel hareket için her zaman geçerli olan hız vektörünü elde ediyoruz:

$$\mathbf{v}(t) = \omega r\ [-\sin(\omega t)\mathbf{i} + \cos(\omega t)\mathbf{j}] \tag{7.13}$$

Sürat ωr, hızın yönü ise r'ye dik. Hız, dairenin *teğetinin* yönündedir. Bunu Şekil 7.4' de görebilirsiniz. Konum vektörü r(t)'nin zamana göre türevini alarak da tabii ki aynı sonucu bulduk.



Şekil 7.4

Şimdi madem sinüsün ve kosinüsün türevlerini nasıl hesaplayacağımızı biliyoruz, ivmeyi doğrudan hesap edebiliriz:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \omega r \left[\frac{-d\sin(\omega t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\cos(\omega t)}{dt}\mathbf{j}\right]$$

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 r\ [\cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j}] = -\omega^2\mathbf{r}(t)$$

Yani düzgün açısal hız ω (hız $v = \omega r$) ile hareket etmek, $-\mathbf{r}(t)$ yönünde, her zaman *dairenin merkezine doğru* bir *ivme gerektiriyor*; ivmenin büyüklüğü de şöyle:

$$a = \omega^2 r = v^2/r \tag{7.14}$$

Newton'un İkinci Kanununa göre merkeze doğru ivme ancak *merkeze doğru bir kuvvet* varsa olur. "*Gök cisimleri*" (mesela yıldızların etrafında dairesel yörünge izleyen gezegenler) için bu kuvvet *kütleçekimi kuvvetidir*. Daire üzerinde hareket, Aristoteles ile Batlamyus'un düşündüğü gibi *doğanın "mükemmel" durumu* böyledir diye olmuyor. Yıldızların ve gezegenlerin yörüngelerini evrensel kütleçekimi kuvveti belirler. Bu kuvveti Newton, Kepler'in gezegenlerin yörüngelerini açıklayan kanunlarını kullanarak keşfetmişti. Bizim Güneş Sistemi'ndeki gezegenlerin yörüngeleri daire değil elips şeklinde. İvmeyi kütleçekimi sağlıyor. Bunların hesapları da dairesel hareket hesaplarına benziyor, ama biraz daha karışık çünkü elipste r mesafesi (konum vektörünün büyüklüğü) de zamanla değişiyor.

PROBLEMLER

1. 45°, 60°, 90°, 180°, 270° açılarını radyan olarak hesaplayın.

2. Uzunçalar plakların üzerinde bulunan "33 1/3 rpm" etiketi, plağa kaydedilmiş müziğin doğru duyulması için plağın dakikada 33 1/3 tur dönmesi gerektiğini anlatır. Plağın çapı r = 30 cm.

   (a) plağın dönüş periyodu nedir?

   (b) plağın açısal hızı rad/s cinsinden kaçtır?

   (c) plağın kenarında bulunan bir noktanın çizgisel sürati kaçtır?

3. Atlıkarıncaya binmiş bir çocuğun koordinatları $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$, $z = z_0(1 + (1/2) \sin 3\omega t)$, burada $\omega = 2\pi/T$ ve $T = 6$ s.

   (a) Konum vektörünü yazın.

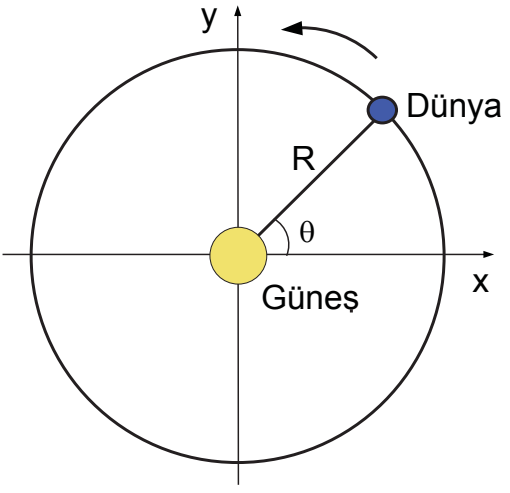
   (b) Hız vektörünü yazın.

   (c) İvme vektörünü yazın.

(d) Zamanın fonksiyonu olarak sürat kaçtır?

(e) Atlıkarıncadaki çocuğun üç boyutlu hareketini tarif edin.

4. Dünya Güneş'in etrafında hemen hemen dairesel bir yörüngede dönüyor. Güneş Dünya'dan yaklaşık 150 milyon kilometre uzakta.



(a) Dönüş periyodu nedir?
(b) Güneş'in etrafında dönen Dünya'nın sürati ne kadar?
(c) Güneş'in etrafında dönen Dünya'nın ivmesi ne kadar?
(d) Dünya $t = 0$ da pozitif x ekseni hizasına geliyor ve dönüş yönü şekilde görüldüğü gibi. $\mathbf{r}(\mathbf{t})$, $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ ve $\mathbf{a}(\mathbf{t})$'yi yazın.
(e) Dünya'nın hareketi icin $x(t)$ grafiğini çizin.

5. Ahmet 36π km/sa hızla araba kullanıyor. 90 derecelik bir dönüşü 10 saniyede yapıyor ve dönüş sırasında süratini azaltmadan dairesel bir yol izliyor.

(a) Dairenin yarıçapı ne kadardır?

(b) Arabanın ivmesinin büyüklüğü ne kadar? Bunu kütleçekimi ivmesi g ile karşılaştırın.

(c) Arabanın ivmesinin yönü ne?

(d) Bu hareket boyunca arabanın ortalama ivmesinin büyüklüğü ve yönü nedir?

8
Newton'un Hareket Kanunları

Galileo'nun sistemli deney çalışmalarından sonra hareket çok daha iyi anlaşıldı. Kütle (eylemsizlik), kütleçekimi, sürtünme, hız ve ivmenin rolleri açıklığa kavuştu. Newton bir cismin hızının değil *ivmesinin* diğer cisimlerin etkisiyle (*kuvvetlerle*) belirlendiğini anladı. Belli bir kuvvet altında, daha büyük kütleli bir cisim için ivme daha azdır, yani kütleyle ters orantılıdır. Her bir andaki ivme, daha sonra gelen anlardaki hızı ve konumu belirler. Newton, fiziğin anlaşılması için bir sistem geliştirmenin yanı sıra, Hareket Kanunları'nı formülleştirebilmek için yeni bir matematik dalı yarattı: Kalkülüs (bunu Newton'un çağdaşı Alman matematikçi ve filozof Leibniz de yapmıştı). **Newton'un Birinci Kanunu** olan *"Eylemsizlik (Atalet) Kanununa"* göre, bir nesne, üzerine hiçbir kuvvet uygulanmadığı zaman, diğer bütün cisimlerden tamamen izole edildiğinde, sabit *momentum vektörü* **p** ile hareket eder; momentum kütle ile hızın çarpımıdır:

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} = \mathbf{sabit}$$

$$\mathbf{F}_{toplam} = 0 \qquad \text{iken} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{dt}} = 0. \tag{8.1}$$

Burada m kütleyi, **v** hız vektörünü, **p** momentum vektörünü, $\mathbf{F}_{toplam}$ da cisme uygulanan toplam kuvveti gösterir. Hareket esnasında cismin kütlesi genellikle sabit kalır, bu durumda Birinci Kanun bir cismin, üzerinde net bir kuvvet uygulanmadığı sürece sabit hızla, düz bir çizgi üzerinde ve aynı yönde hareket etmeye devam edeceğini söylüyor. Jet uçağında olduğu gibi, *cisim kütle kaybederse, bu kanunun deneylerin gösterdiği doğru haline göre toplam momentum sabit kalır*.

Soru

Bu kanuna neden *"Eylemsizlik Kanunu"* deniyor?

Kütlesi değişen bir cismin, üzerinde etkiyen toplam kuvvet $F_{toplam} = 0$ ise, Newton'un Birinci Kanunu kütle değişimi ve hız değişimi arasında bir ilişki verir.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \rightarrow m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt} = 0 \tag{8.2}$$

Newton'un İkinci Kanunu, yani *"Hareket Denklemi"* başka cisimlerle etkileşimin bir cismin hareketini nasıl etkilediğini tanımlar:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{toplam} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ \mathbf{F}_{toplam} &= m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Son denklem, kütle *m* sabit olduğu zaman (ki çoğu zaman sabittir) geçerli olur. Meşhur *F = ma* kanunu budur. Bu kanun, cisimlerin diğer cisimlerle (*kuvvetler* yoluyla) etkileşmesinde kuvvetin, eskiden sanıldığı gibi hızı değil, ivmeyi belirlediğini söylüyor.

Galileo ve Newton'dan önce, kuvvetlerin hızı belirleyerek harekete neden olduğu düşünülüyordu. Kısmen, sürtünme kuvvetleriyle ilgili yanlış anlamalardan kaynaklanıyordu bu. Bilimsel yöntemin gelişmesi ve Galileo'nun sürtünme ve kütleçekimi üstüne dikkatli ve sistemli deney çalışmaları Newton'un İkinci Kanununun yolunu açtı. Aslında İkinci Kanunun özel bir durumu olan Birinci Kanun sabit hızlı hareketi konu alır, *buna durma hali v = 0 da dahildir.* Antik dönem ve ortacağ filozoflarının ve Newton'dan önceki "doğa filozoflarının" çoğu, durma hali ile sabit hızla hareket halini farklı durumlar olarak görüyorlardı. Durma hali bütün cisimlerin *doğal hali* sayılıyor, hareket halinin ise, sabit hızla olsa bile kuvvet istediği düşünülüyordu.

Newton Kanunlarına göre sabit hızlı hareket, toplam kuvvet sıfır demektir. Ortada hiç kuvvet olmayabilir veya kuvvetler toplam kuvvet sıfır olacak şekilde birbirini dengeliyor olabilir. Böylece çoğu zaman sabit hız durumları sürtünme ile diğer kuvvetler arasındaki dengeden kaynaklanır.

Hız, ivme ve zamanın ilk iyi deneysel ölçümlerini Galileo yaptı. Anlık hızın *matematiksel* tanımı ancak Newton'un kalkülüsü geliştirmesiyle mümkün oldu. Bu gelişmelerden önce sabit hızla hareket hali ile ivmeyle hareket hali birbirinden tam olarak ayırt edilemiyordu. *Sürtünme ve diğer kuvvetler arasında bir denge olmasını gerektiren sabit hızlı hareket kolayca bütün hareketler için genelleniyordu ve hız için kuvvet gerektiği yanılgısı vardı*.

Kütleçekimi dışındaki kuvvetler için, farklı kütlelere sahip cisimlere aynı kuvveti uygulayarak yapılan dikkatli deneyler, ortaya çıkan ivmenin kütleyle ters orantılı olduğunu, *F = ma*'yı doğruluyor. İkinci Kanun aslında, bir cisim üzerinde, etkileşimde bulunduğu diğer cisimlerden kaynaklanan etkinin tam bir ölçümü

olarak kuvveti *tanımlıyor*. İvme, tam olarak ölçülebilen bir nicelik. Keza kütle de öyle; kütle *maddenin miktarı* olarak tanımlanıyor. Böylece İkinci Kanun, SI sistemindeki kuvvet birimini, 1 kilogramlık bir kütleye 1 m/s^2 ivme kazandıran *Newton*'u (N) veriyor: 1 N = 1 kg m/s^2.

Soru

"Madde miktarı" neyi ölçer? Uygulamada, maddenin miktarını ölçmek, bunu gerçekten *saymak* nasıl mümkündür? Kütlenin doğal birimleri nelerdir?

Newton'un Üçüncü Kanunu etkileşen iki cismin birbirleri üzerine uyguladıkları kuvvetleri karşılaştırır; cisim 1'in cisim 2'ye uyguladığı kuvvet $F_{1,2}$'nin, cisim 2'nin cisim 1'e uyguladığı kuvvet $F_{2,1}$ ile aynı büyüklükte ama ters yönde olduğunu söyler: *"Etki tepkiye eşittir"*:

$$F_{1,2} = -F_{2,1} \tag{8.4}$$

İki cisim etkileşim içindeyken her bir cismin hareketini *o cisme* etki eden kuvvet belirler. Newton'un İkinci Kanununa göre iki cismin hareket denklemleri şöyledir:

$$\mathbf{F}_{2,1} + 1\text{üzerinde etki yapan diğer kuvvetler} = m_1\mathbf{a_1}$$
$$\mathbf{F}_{1,2} + 2\text{üzerinde etki yapan diğer kuvvetler} = m_2\mathbf{a_2}$$

8.1 BİR CİSME ETKİ EDEN KUVVETLER

Newton'un İkinci Kanununa göre, bir cisme etki eden, diğer bütün cisimlerden kaynaklanan *toplam* kuvvet, ivmeyi belirler. İvme vektörünün bileşenlerinden integral alarak hızın bileşenlerine, sonra yine integral alıp zamanın fonksiyonu olarak cismin konumuna ulaşmak mümkündür. Böylelikle, cismin izlediği *yol*, cismin ilk konumu ve hızıyla, ve Newton'un İkinci Kanunuyla cisme her bir anda etki eden kuvvetlerin hepsini bularak belirlenir. Bir cisme etki eden kuvvetler o cismin konumuna ve bazen ayrıca hızına bağlıdır. Hareket denklemini (Newton'un İkinci Kanunu) çözerken, cisim hareket ettikçe kuvvetlerin de değiştiğini dikkate almak gerekir.

Pek çok parçası olan *yaygın** bir cisim söz konusu olduğunda bu program biraz karmaşıktır; çünkü hareket denklemini cismin her bir parçası için ayrı ayrı çözmek gerekir. Katı cisimler için, gelecek bölümde tanımlayacağımız *"kütle*

* Yaygın: Bir nokta gibi değerlendirilebilecek kadar küçük olmayan.

merkezinin" hareketini ve cismin kütle merkezine göre dönüşünü takip etmek yeterlidir. Katı cisimlerin hareketlerini, bunlar sanki noktasal parçacıklarmış gibi, cismin kütlesini onun kütle merkezinin hareketiyle bir tutarak ele alacağız. Cisim katı değil de akışkansa, parçalarının akışını belirlemek için Newton Kanunlarını kullanarak türetilen *akışkanlar mekaniği* ise, henüz tam olarak anlaşılamamış, hayranlık uyandırıcı bir dizi davranışı, mesela *türbülansı* anlamak için geliştirilmiş birçok yeni kavram ve araç gerektirir.

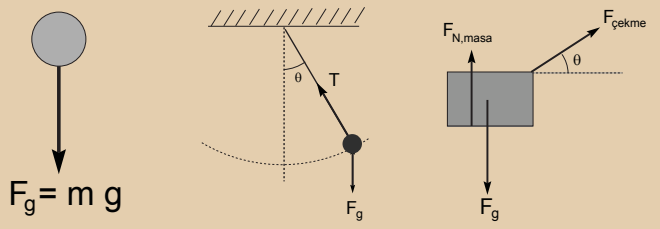
Bir cismin belli bir anda veya belli bir durumdaki toplam ivmesini bulurken, *o cisme* etki eden farklı farklı bütün kuvvetleri vektör olarak bir resimde gösterip toplam kuvveti belirlemek işe yarar. Bu resme "*serbest cisim diyagramı*" denir. Bu diyagram kullanılarak tüm koordinat eksenlerindeki bütün kuvvetlerin bileşenleri alınıp, bunların toplamı o eksendeki *m***a**'ya eşitlenir.

Serbest Cisim Diyagramı Çizmek

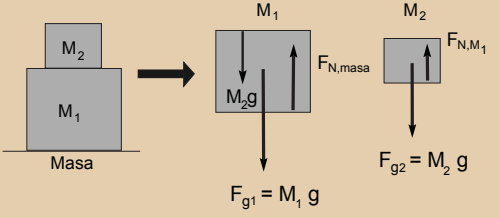
Serbest cisim diyagramı, ilgilendiğimiz cisim *üstünde* etkili olan *bütün* kuvvetleri gösterir. Diyagramda gösterilen bu dış kuvvetler cismin hareketini belirler. *Bu cisim tarafından başka cisimlere uygulanan kuvvetler* diyagrama katılmamalıdır, çünkü bunlar cismin kendisinin hareketini etkilemezler.

Serbest Cisim Diyagramı Örnekleri

Serbest düşen top *Sarkaç* *Çekilen kutu*



Kütle 2, Kütle 1'in üzerinde duruyor



Elektrik ve manyetizma kuvvetleri ile *kütleçekimi kuvveti* gibi temel kuvvetler, *uzaktan* etki eden kuvvetlerdir. Kuvvetin etki etmesi için iki cismin birbirine değmesi gerekmez. Farklı nesnelerin elektromanyetik kuvvetlerinin birleşimi, mesela bir elektron üstünde, komşu atomların bütün elektron ve protonlarından kaynaklanan toplam kuvvet gibi kuvvetler de, uzaktan etki ederler. Makroskobik cisimler arasında etki eden kuvvetlerden bazıları da *temas kuvvetleridir*. Bunlar yalnızca iki cisim fiilen temas ediyorsa ortaya çıkarlar. Temas kuvvetlerinden biri de, birbirinin içine geçemeyen katı makroskobik cisimlerin bu katılığından dolayı oluşan, *normal* kuvvet denen kuvvettir. Bir cismin başka bir cisimle temas ettiği yüzey üzerinde ortaya çıkan *yüzey sürtünme kuvveti* de bir temas kuvvetidir. Mikroskobik düzeyde bakıldığında, normal kuvvetler ile sürtünme kuvvetleri aslında temas kuvveti değildir. Bunlar, temas yüzeyinin her iki tarafındaki atomların birbiri üzerine uyguladığı elektromanyetik kuvvetlerin makroskobik toplamı olarak ortaya çıkarlar. *Maddelerin özelliklerini belirleyen bütün kuvvetler gibi bu kuvvetler de, pek çok atomdan gelen elektromanyetik kuvvetlerin karmaşık bir birleşiminden kaynaklanırlar.* Ortalama bir anlamda, bir katının ya da sıvının atomları sıkı sıkı paketlenmiştir, dolayısıyla bunların temas halinde olduğu söylenebilir, fakat atomlar düzeyinde, kuantum düzeyinde, "temas" bambaşka bir şeydir. Dahası, elektronlar atomun içinde, protonları içeren çekirdeğin 10^{15} katı büyüklüğünde bir hacme dağılmış haldedir. Tek tek elektronlar ve protonlar arasında da aslında temas yoktur, bunların aralarındaki elektromanyetik kuvvetler toplam mikroskobik kuvveti oluştururlar.

Uzaktan etki eden temel kuvvetlerin aksine, normal kuvvetin de sürtünme kuvvetinin de genel geçer formülleri yoktur. Bu kuvvetler mevcut duruma son derece bağlıdır; iki cismin de yüzeylerine ait ayrıntılara ve sürtünme söz konusuysa buna ek olarak iki cismin birbirine göre hızlarına bağlı olarak değişirler. Sürtünme kuvvetleri, etki ettikleri cismin hareket yönünün tersine yöneliktir. Sürtünme kuvvetinin büyüklüğü sabit olabilir, mesela eğimli bir düzlem üzerinde kayan bir kutu için büyük ölçüde böyledir. Başka durumlarda, sürtünme veya frenleme (sönümleme) kuvvetlerinin büyüklüğü göreli hızla, göreli hızın karesiyle veya hızın başka bir fonksiyonuyla orantılı olabilir. Bir yüzeydeki sabit statik ve kinetik sürtünme kuvvetleri sıkça karşılaşılan durumların çoğunda büyüklük bakımından normal kuvvetle orantılıdır. Normal kuvvet ise, malzemelerin katılığından kaynaklanır; ivmenin yüzeye dik (bir başka deyişle *normal*) olan bileşeni sıfırdır veya, varsa, yüzeyin ivmesi ile aynıdır; öyle ki ortak bir yüzeyde temas eden iki katı cisim birbirinin içine batmaz. Böylece, temas yüzeyine yakın yerdeki atomların mikros- kobik tepkisi ve ayarlanmasıyla oluşan normal kuvvet, cisimlerin birbirinin içine girmeye başlamamasını sağlar. Bir durumdaki normal kuvvetin büyüklüğü, yüzeye dik olan bütün diğer kuvvetlerden ve bu durumda, sıfır olsun olmasın, yüzeye dik olan net ivmeden çıkarılır. Normal kuvvet çok yüksek bir *çökme eşiğine* kadar cismin katılığıyla desteklenir. Dış kuvvetlere karşılık, normal kuvvet, tam

da katı cismin yüzeyine dik yönde, genellikle sıfır toplam ivme verecek kadar yükselir. Eğer yüzeye etki eden diğer kuvvetler eşikten daha yüksekse yüzey bükülür, malzeme kırılabilir, çökebilir, hatta sıvılaşabilir. Dairesel bir yol üzerindeki hareketteyse normal kuvvetin büyüklüğü, bütün diğer kuvvetlerle beraber, ivmenin dairenin merkezine doğru olan toplam bileşeninin v^2/r olmasını sağlayacak kadardır.

8.2 AĞIRLIK NEDİR?

Ağırlık, Dünya'nın, yüzeyinde bulunan bir cisme uyguladığı kuvvettir. 14. Bölümde göreceğimiz üzere, doğadaki temel etkileşimlerden biri, bütün kütleler arasında bulunan *evrensel kütleçekimi kuvvetidir*. *MD* kütlesindeki Dünya'nın, yüzeyinde bulunan *m* kütlesindeki bir nesneye uyguladığı kuvvete o nesnenin *ağırlığı* denir.

$$W = -\frac{GM_D m\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \tag{8.5}$$

Burada *R*, nesnenin dünyanın merkezine olan uzaklığı, yani Dünya'nın yarıçapıdır. *G*, Newton'ın evrensel kütleçekimi sabiti denen bir orantı sabitidir. *G*'nin SI birimlerinde değeri $6{,}67 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}'dir. **R** ile, *m* noktasal kütlesinin Dünya'nın merkezine göre konum vektörünü gösteriyoruz. Dünya'nın *m* kütlesine uyguladığı bu kuvvet bir çekim kuvvetidir, Dünya'nın merkezi yönündedir, $-\hat{\mathrm{R}}$ yönü de bunu gösterir. Dünya'nın yüzeyinde bulunan bir nesne icin *R* Dünya'nın yarıçapı $R \cong 6371$ km kadardır; Dünya'yı yuvarlak farz edersek onun ortalama yarıçapıdır bu. Ağırlık, *m* kütlesiyle orantılıdır:

$$W = \frac{GM_D m}{R^2} \equiv mg$$

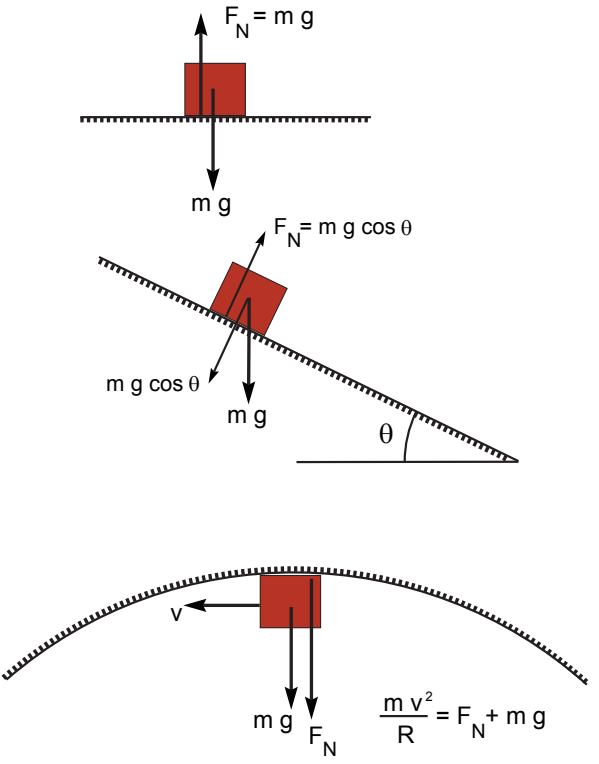
Dünya yüzeyindeki kütleçekimi ivmesi g'yi,

$$g \equiv \frac{GM_D}{R^2} \cong 9,8m/s^2 \tag{8.6}$$

büyüklüğünde, Dünya'nın merkezi yönünde tanımlarız. Dünya'nın yüzeyinde kütleçekimi ivmesi bütün cisimler için aynıdır, çünkü bu ivme, cismin kütlesi olan *m*'ye bağlı değildir.

8.3 NORMAL KUVVETLER

Şekil 8.1 üç farklı durumda normal kuvvetleri (F_N) gösteriyor. Şekilde, kutunun serbest cisim diyagramı var. Dünya'nın kutuya uyguladığı kuvveti (ki bu, kutunun ağırlığı $m\mathbf{g}$ oluyor) ve yatay yüzeyi oluşturan cismin (diyelim mutfağınızdaki ma-



Şekil 8.1

sanın) kutuya uyguladığı kuvveti gösteriyor. Kutu hareketsiz kaldığına göre dikey ivmesi sıfır. Demek ki Dünya'nın uyguladığı aşağı doğru kuvvet (kutunun ağırlığı) ile masanın uyguladığı yukarı doğru kuvvet eşit büyüklükte ve birbirlerini tam olarak götürüyorlar. Bu kutu için şimdiye kadar yaptığımız, Newton'un İkinci Kanununu uygulamaktı. Yeri gelmişken, ola ki *masanın* hareket denklemini merak etseydik, Newton'un İkinci Kanununu kullanırken kutu *tarafından* masa *üzerine* uygulanan kuvveti ele alırdık. Newton'un Üçüncü Kanununa göre, kutunun, yüzeyin altındaki katı nesneye uyguladığı kuvvet, mutfak masasının kutuya uyguladığı kuvvete büyüklük bakımından eşit, yön bakımından terstir. Dolayısıyla, kutunun masaya uyguladığı, hem kutunun hem de masanın katı olmasından kaynaklanan normal kuvvet de, kutunun ağırlığına eşit *olmak durumundadır*. Hem kutunun masaya, hem de masanın kutuya uyguladığı kuvvetler maddî kuvvetlerdir. Bunlar kütleçekimi kuvveti değildir. Elimizdeki örnekte bu kuvvetlerin büyüklüğünün kutunun ağırlığına eşit olması yalnızca, maddi kuvvetlerin kütleçekimi kuvvetlerine karşılık olarak meydana gelmesinden kaynaklanıyor.

Şekil 8.1'de ortadaki resimde görülen ikinci örneğimizde, kutu sürtünmenin olmadığı bir *eğik düzlemde* duruyor. Kutu, eğik düzlem *boyunca* hareket edebilir ve ivme kazanabilir. Fakat kutunun, eğik düzleme *dik olan*, yani düzlemin *içine ya da dışına doğru* olan hız ve ivme bileşenleri, düzlem ve kutu katı madde olarak kalmaya devam ettiği müddetçe sıfırdır. Bu demek ki yüzeye dik yöndeki toplam kuvvet sıfırdır. Eğik düzlemin temas yüzeyi boyunca kutuya uyguladığı normal kuvvet; Dünya'nın kutuya uyguladığı kuvvetin, yani kutunun ağırlığının, yüzeye dik olan bileşenine eşit olmalı. Bu bileşenin büyüklüğü de bu örnekte $mg \cos \theta$'dır. Normal kuvvetin büyüklüğü budur.

Şekil 8.1'de en alttaki resimde görülen üçüncü örneğimizde, kutu sürtünmesiz ve dik duran dairesel bir yüzey üzerinde, v hızıyla dairesel bir yol izleyerek hareket ediyor.

Kutu nasıl oluyor da yüzeyin üzerinde düşmeden kalıyor?

Kutuya etki eden bütün kuvvetleri düşünelim. Yüzey malzemesinin kutuya uyguladığı normal kuvvet var. Bu kuvvet, kutunun, katı yüzeyin içine doğru hareket etmesine engel oluyor. Resimde gösterilen anda bu normal kuvvet aşağı yönde. Buna ek olarak Dünya'nın kutuya uyguladığı kuvvet var, bu da kutunun ağırlığı. Resimde görülen anda bu kuvvetlerin ikisi de aşağı yönde. Bu ikisinin toplamı Newton'un İkinci Kanunu uyarınca aşağı yönde net ivmeyi veriyor:

$$F_{total} = F_N + mg = m\, a_R \tag{8.7}$$

Burada a_R, aşağı ve dik yöndeki ivmedir, bu da dairesel yol üzerindeki hareketin bu ânında, merkeze doğru radyal yönde bulunuyor. 7. Bölümde gördüğümüz gibi, düzenli dairesel hareket için, dairenin merkezine doğru radyal yönde ivme $a_R = v^2/R$, burada R de yolun yarıçapı. Öyleyse dairesel yolu oluşturan maddenin sağladığı normal kuvvetin büyüklüğü:

$$F_N + mg = \frac{mv^2}{R} \tag{8.8}$$

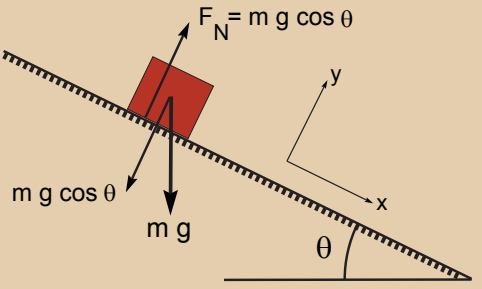
Bu bize, elimizdeki durum için normal kuvvetin ne olduğunu veriyor. Normal kuvvetin genel bir formülü yok; her problem için Newton'un İkinci Kanununu yüzeye dik olan yön için yazıp, o problemde etkili olan bütün diğer kuvvetleri normal kuvvetle birlikte işin içine katarak ve normal yönde ivmenin değerini de dikkate alarak, o problemde normal kuvvetin ne olduğunu bulmak gerekiyor.

Bazen "merkezkaç" ve "merkezcil" kuvvet diye bir şeylerden bahsedilir. Bu yanıltıcıdır. Burada kastedilen, Newton'un İkinci Kanunu $F = ma$'nın sadece sağ tarafı, ma kısmıdır; denklemde olduğu gibi, düzgün dairesel harekete ait özel bir durumdur. Doğada, özel olarak dairesel harekete has hiçbir kuvvet yok. Bu sadece, birtakım gerçek kuvvetlerin, diyelim kütleçekiminin, elektrostatik çekimin, sür-

tünmenin, bir ip üzerindeki gerilimin, bir katı yüzeyin uyguladığı normal kuvvetin vb, artık eldeki durumda neler söz konusuysa onların, $F = ma$'nın F kısmındaki şeylerin, toplamda düzenli bir dairesel hareket oluşturacak şekilde $ma = mv^2/r$ etmeleridir.

İki Boyutta Hareket Denklemi (Newton'un İkinci Kanunu)

Eğer problemde iki boyutlu hareket varsa hareket denklemi her iki boyut için de yazılmalıdır. Mesela sürtünmesiz eğik düzlemdeki kutuyu ele alalım:



Önce x-y koordinatlarını tanımlayalım: Burada $+x$'i eğik düzlem boyunca aşağı yön, $+y$'yi de düzleme dik, yukarı yön olarak alıyoruz. Koordinatları istediğiniz gibi alabilirsiniz, hesabınız boyunca aynı koordinat tanımına sadık kalın yeter. Koordinatları, problemi tanımlamayı ve çözmeyi kolaylaştıracak şekilde seçmek yerinde olur. Bu örnekte y'yi dikey, x'i yatay olarak alsak da olur, fakat o zaman denklemler biraz daha karışık olacak. x'i eğik düzlemin üzerinde tanımlıyoruz, çünkü hareket yönünün bu olduğunu biliyoruz. O zaman, x ve y'de hareket denklemleri şöyle oluyor:

$$\Sigma\, \mathbf{F}_x = m\mathbf{a}_x$$
$$\Sigma\, \mathbf{F}_y = m\mathbf{a}_y$$

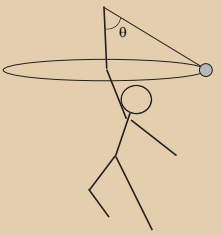
Şekle bakarak bunların büyüklüklerini de buluyoruz:

$$\Sigma\, F_x = mg \sin\theta = ma_x$$
$$\Sigma\, F_y = F_N - mg\cos\theta = ma_y = 0$$

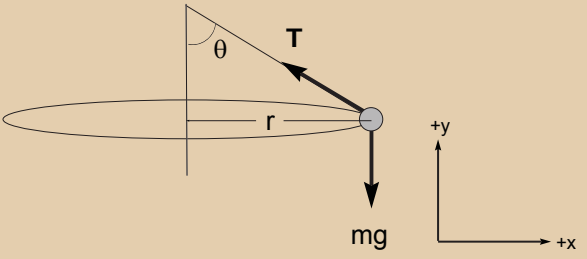
Kutu y yönünde hareket edemez, dolayısıyla $a_y = 0$ olduğunu hemen söyleyebiliriz. Şimdi bu iki denklemi kullanarak, $a_x = g \sin\theta$ ve $F_N = mg\cos\theta$ olduğunu buluyoruz.

Çözümlü Problem: Çevrilen Top

Bir çocuk, ipe bağlı bir topu resimde görüldüğü şekilde başının üzerinde çeviriyor. Daha hızlı çevirdikçe topun daha fazla yükseldiğini, θ açısının büyüdüğünü fark ediyor. İpin uzunluğu L'dir.



1. Topun serbest cisim diyagramını çizin.
   Topa etki eden sadece iki fiziksel kuvvet var: Biri kütleçekimi (aşağı yönde mg) biri de ip tarafından uygulanan gerilim (ip boyunca, T). Serbest cisim diyagramı bu iki kuvveti gösteriyor.



2. Hareket denklemini yazın.
   Önce topun şu anda bulunduğu yerdeki T ve mg kuvvetlerinin tanımladığı düzlemde resimdeki gibi x, y koordinatlarını tanımlayıp hareket denklemini iki boyutlu olarak yazmamız lazım. Eğer koordinatları şekilde görüldüğü gibi alırsak, x ve y yönlerindeki hareket denklemleri şöyle olur:

$$\Sigma\, F_x = -T\sin\theta = ma_{\mathrm{x}} = m\left(-\frac{v^2}{r}\right)$$

$$\Sigma\, F_y = T\cos\theta - mg = ma_y = 0$$

   Burada v, dairesel hareket eden topun hızı, r ise topun dönüş dairesinin yarıçapıdır. r, L'ye bağlı olarak bulunabilir: $r = L\sin\theta$.

Eksi işareti konmasının ($a_x = -\frac{v^2}{r}$) nedeni, ivmenin dairenin merkezine doğru olması, o da bu örnekte $-x$ yönüne denk düşüyor.

3. $\theta = 45°$ ise topun hızını bulun.
   θ'nın bir fonksiyonu olarak v hızını yukarıdaki iki hareket denklemini çözerek bulabiliriz. ΣF_y denkleminden, $T = \frac{mg}{\cos\theta}$ sonucunu buluyoruz. Bunu ΣF_x denklemine koyunca şunu buluyoruz:

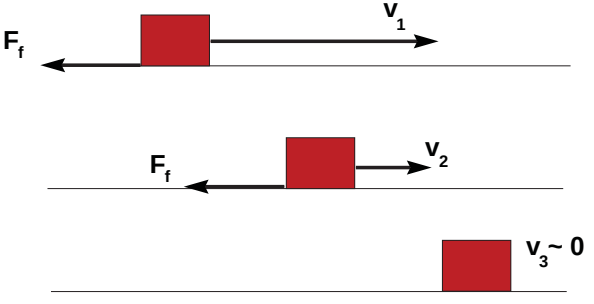
$$-\cancel{m}g\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\cancel{m}\frac{v^2}{L\sin\theta} \rightarrow v = \sqrt{gL\ \tan\theta\ \sin\theta}$$

   Topun hızının hem yarıçapa hem de açıya bağlı olduğunu görüyor sunuz. $\theta = 45°$ olduğunda, $\tan 45° = 1$, $\sin 45° = 1/\sqrt{2}$ dolayısıyla $v(\theta = 45°) = \sqrt{gL/\sqrt{2}}$ olur.

8.4 SÜRTÜNME

Bir cisme etki eden *frenleme* (veya sürtünme) kuvveti $\mathbf{F}_s$, cismin biçimine, çevredeki havanın ya da başka akışkanların yoğunluğuna, cismin ve temas ettiği diğer katı cisimlerin yüzeylerinin sertliğine bağlıdır. Sürtünme kuvveti genellikle hız **v**'ye de bağlıdır: $\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_s(\mathbf{v})$. Sürtünme kuvveti $\mathbf{F}_s$, **v**'nin bir fonksiyonudur. Sürtünme kuvvetinin büyüklüğü **v**'nin büyüklüğüne ve yönüne bağlı olabilir. Sürtünme kuvvetinin yönü, hareketin yönünün tersidir.

Basit ve sıkça kullanılan bir örnek olarak, yüzey üzerinde kayan bir cisme etki eden sürtünme kuvvetini ele alalım. Şekil 8.2'de yatay yüzeyde sağa doğru hareket eden bir kutu görülüyor. Kutu üzerinde, hareket ettiği yönün tersine doğru etki eden sabit bir sürtünme kuvveti var. Kutunun hızı, bu sürtünme (frenleme)



Şekil 8.2

kuvvetinden dolayı zamanla azalıyor. Bunun gibi pek çok durumda, bir yüzey üzerinde kayan cisme etki eden sürtünme kuvveti hızın büyüklüğüne değil, yalnızca yönüne bağlı olur. Tipik olarak, sürtünme kuvveti, yüzeyin cisme uyguladığı normal kuvvetle orantılıdır;

$$\mathbf{F}_s = -\mu F_N \hat{\mathbf{v}} \tag{8.9}$$

Burada sürtünme katsayısı μ (mü) yüzeye ait bir özellik, F_N normal kuvvet, $\hat{\mathbf{v}}$ de hareket yönündeki birim vektördür. Sürtünme katsayısı μ, birbirine temas eden cisimler arasındaki göreli hıza bağlı olabilir. Pek çok halde, iki katı cisim arasındaki sürtünme katsayısı *kinetik* sürtünme katsayısı μk'dir. Bu, en düşük hızdan başlayarak göreli hızların büyük bir bölümü için, yüksek bir hassasiyetle geçerlidir. Sürtünme katsayısı, birbirine temas eden cisimler birbirine göre hareket halinde olmadıkları zaman daha yüksek bir μs değerine (*statik* sürtünme katsayısına) sahiptir. Sürtünme katsayısı için iki farklı değer vardır ve yüzey temaslarının çoğu için $\mu s > \mu k$'dır. Bir yüzey üzerinde durmakta olan bir nesneyi harekete geçirmek için daha büyük bir kuvvet ($\mu s F_N$) uygulamak gerekir. Nesne hareket etmeye başladığı anda sürtünme kuvvetinin büyüklüğü $\mu k F_N$ 'ye düşer.

Kavramlara Dair Sorular

S1: m kütlesinde bir tuğla, bir masanın üstünde duruyor. Eğer tuğlanın üstüne elinizle bastırırsanız masanın normal kuvveti mg'den büyük mü, küçük mü, yoksa ona eşit mi olur?

S2: Genel olarak, normal kuvvet büyüdükçe, yüzey ile hareket eden nesne arasındaki sürtünme kuvveti de büyür. Neden?

S3: Sürtünme kuvveti eğimli yüzey üzerinde hareket eden cismin hız vektörüyle ilişkili midir?

PROBLEMLER

1. Kütlesi m olan bir kutu, Şekil 8.1'de alttaki resimde görüldüğü gibi sürtünmesiz, dikey bir dairesel yol üzerinde v sabit hızıyla hareket ediyor olsun. Yolun yarıçapı R ise, kutunun, yolun üst noktasından geçerken yolda kalması için gereken minimum hız ne kadardır? İpucu: Yolun uyguladığı normal kuvvetin yönü, yol yüzeyinden dışarıya doğrudur; bunun yönü hiçbir zaman yolu oluşturan katı malzemenin içine doğru olamaz.

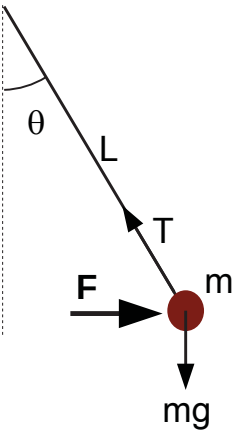
2. Şekil 8.1'de, en alt resimde görülen kutu, dairesel yol üzerinde ilerlerken dairenin merkezinden geçen dikey çizgiyle α açısı yapan bir konumdan geçiyor.
   (a) Bu noktadan v hızıyla geçen kutunun yol üzerinde hareket etmeye devam etmesi için gereken normal kuvvet ne kadardır?
   (b) Bu noktadan geçerken kutunun dairesel yol üzerinde kalması için gereken minimum hız ne kadardır?

3. Galileo, sürtünme olmadığı zaman bütün cisimlerin aynı ivmeyle düştüğünü göstermişti. Vakumlu ortamda, durduğu yerden serbestce düşen bir cisim, t süresinde y mesafesi kadar düşer, bunun formülü de $y = gt^2/2$'dir. Bunun bütün cisimler için doğru olduğunu göstermek için, bütün cisimlerin aynı zaman aralığında aynı y mesafesi kadar düştüğünü göstermek gerekir. Galileo'nun zamanında, zaman aralıklarını hassas biçimde ölçmek zordu.
   (a) Bir nesnenin vakumlu ortamda serbest düşüşle 1 saniyede kat ettiği mesafeyi, uzunluk biriminiz sayın. Bir cisim 1, 2, 3, 4, 5, 6 saniyede kaç uzunluk birimi kadar düşer?

4. Galileo zaman ölçümlerini daha kolay yapmak için eğik düzlemler kullanmıştı: Şekil 8.1'de ortadaki resimdekine benzer sürtünmesiz eğik düzlemler serbest düşüşü yavaşlatmaya yarar.
   (a) Eğik düzlemden aşağı kayan ("düşen") m kütlesinde bir cisme etki eden bütün kuvvetleri gösterin.
   (b) Yüzeye dik olan yönde toplam kuvvet ne kadar?
   (c) Eğik düzlemin cisme uyguladığı "normal kuvvetin" büyüklüğü ne kadar?

5. Sürtünmesiz bir eğik düzlem üzerinde s mesafesi kadar "serbest düşmek" $t_{\text{eğik}}$ kadar zaman alıyor ve aynı s mesafesini vakumlu ortamda dikey olarak serbest düşmek t kadar zaman alıyorsa, $t_{\text{eğik}}$, t'den büyüktür: $t_{\text{eğik}} > t$.
   (a) Eğik düzlemin yatay eksenden α açısı $\alpha = \pi/4$ *radyan* $= 45°$ ise $t_{\text{eğik}}/t$ değeri nedir?
   (b) Küçük α açıları için $t_{\text{eğik}}/t$ oranını ifade etmenin uygun bir yolunu bulun. Küçük açılar icin $\sin(\alpha) \cong \alpha$ yaklaşık eşitliğini kullanın.

6. (a) Yan sayfada görülen şekildeki sarkacın dikey yönden θ açısı yapacak şekilde dengede durması için ipteki T gerilimini ve gereken yatay F kuvvetini, sarkacın ağırlığı mg ve θ açısı cinsinden bulun.
   (b) F yatay kuvvetini uygulamak yerine topu dikey eksen etrafında dairesel yörüngede dönmeye bıraksanız yine aynı açıyı koruyabilir misiniz?
   (c) Eğer sizce bu mümkünse, dönüş periyodu ne kadar olmalı?



7. Normal kuvvet, ağırlık ve ivme (Defne Üçer): Tartılar ağırlığınızı kilogram olarak verir. Kilogram aslında bir kütle birimidir. Tartı sizin ona uyguladığınız kuvveti ölçer, bu da tartının size uyguladığı *normal kuvvete* eşittir. Sabit bir odada tartıya çıktığınızda, tartıya uyguladığınız kuvvet sizin ağırlığınıza eşittir, $W_g = Mg$; burada M sizin kütleniz, g de Dünya'nın yüzeyindeki kütleçekimi ivmesi. Diyelim ki asansörde tartılmak istiyorsunuz. Asansör duruyorken tartı Wg'yi gösterecek. Aşağıdaki soruları hesap yapmadan cevaplamaya çalışın; sezgilerinizi dinleyin. Aşağıdaki durumlarda, tartı sizi Wg'den fazla mı, az mı yoksa ona eşit mi gösterir?

   (a) Asansör sabit hızla yukarı çıkarken?

   (b) Asansör sabit hızla aşağı inerken?

   (c) Asansör hızlanarak aşağı inerken?

   (d) Asansör yavaşlayarak aşağı inerken?

   (e) Asansör hızlanarak yukarı çıkarken?

   (f) Asansör yavaşlayarak yukarı çıkarken?

   (g) Kendi bedeninizin serbest cisim diyagramını çizip, sizin *üstünüzde* etkili olan bütün kuvvetleri gösterin.

   (h) Newton'un İkinci Kanununu yazın.

   (i) Şimdi a'dan f'ye kadar olan soruları, her durum için serbest cisim diyagramını ve Newton'un İkinci Kanununu kullanarak cevaplayın. Verdiğiniz ilk cevaplar doğru muymuş?

   (j) Cevaplarınızı, asansörün kablosunun kopup serbestçe düşmesi duru muyla karşılaştırın. Böyle bir durumda tartı sizce ne gösterirdi? Denklemleriniz bu cevapla tutarlı mı?

8. Birbirinin aynı olan sürtünmesiz iki eğik düzlemin tepesinde duran, birbirinden farklı kütlelere sahip iki kutu bırakılacak olsa, yere önce hangisi varır?

9. Eğim açısı θ olan bir eğik düzlem düşünün. Sürtünme kuvvetinin büyüklüğü, normal kuvvetin büyüklüğünün μ katı; $F_s = \mu F_N$. Eğik düzlemden aşağı doğru kayan M kütlesine sahip bir kutuya düzlem boyunca etki eden toplam kuvvet bileşenini ve düzlemden aşağı iniş ivmesini bulun. İvmenin bütün kütleler için aynı olduğunu unutmayın, ivme cismin kütlesi M'den bağımsızdır.

10. Bir cisim, Problem 9'daki eğik düzlemin tepesindeki duran konumundan serbest bırakılıyor.
    (a) Cismin serbest kaldıktan t saniye sonraki hızını bulun.
    (b) Cismin t süresinde düzlem boyunca kat ettiği mesafeyi bulun.
    (c) Eğik düzlemin yüksekliği h ise, cisim düzlemin sonuna ne kadar zamanda varır?

11. 1 m yüksekliğe ve $\mu = 0{,}1$ sürtünme katsayısına sahip bir eğik düzlemin tepesinden bir cisim serbest bırakılıyor. Eğim açısının a) 30°, b) 45°, c) 60° olduğu durumlar için, cismin en aşağıya varmasının ne kadar süreceğini bulun.

12. Kütleleri $M_1 > M_2$ olan iki cisim, birbirinin aynı olan sürtünmeli eğik düzlem lerin tepesinden serbest bırakılsa, aşağıya önce hangisi varır? Kutuların her birindeki sürtünme kuvvetinin büyüklüğü, eğik düzlemin o kutuya uyguladığı normal kuvvetin büyüklüğüyle orantılı; $F_s = \mu F_N$.

13. Bazı yüzeylerin F_s sürtünme kuvveti, $(F_N)^2$ veya $(F_N)^3$ ile orantılı olabilir. Yüzeyi böyle olan eğik düzlemlerden aşağı inişte de ivme cismin kütlesinden bağımsız mıdır?

14. Birbirinin aynısı iki kutu olan 1. Kutu ve 2. Kutu, eğim açıları $\theta_1 = 45°$ ve $\theta_2 = 30°$, yükseklikleri ise $h = 1$ m olan sürtünmesiz iki eğik düzlemden aynı anda bırakılıyor. Yolun sonuna önce hangi kutu gelir?

15. Eğer bir önceki problemdeki düzlemlerin ikisi de sürtünmeli olsaydı ve kinetik sürtünme katsayıları da aynı, $\mu = 0{,}1$ olsaydı, yolun sonuna önce hangi kutu gelirdi?

16. Problem 9'da bulduğunuz ivmeye, etkin kütleçekimi ivmesi g_{etkin} diyebilirsiniz. $\mu = 0$ ve $\mu = 0{,}1$ için g_{etkin}/g tablosu yapın, her örnekte $\theta = 15°, 30°, 45°, 60°$ açılı eğik düzlemler olsun.

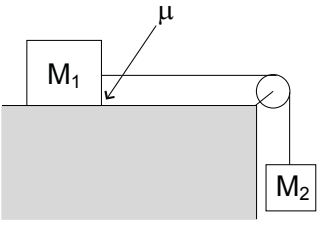
17. M_1 ve M_2 kütleli iki cisim, kütlesiz (kütlesi ihmal edilebilecek kadar küçük) bir iple birbirlerine bağlı. M_1 sürtünme katsayısı μ olan yatay bir masa üzerinde, M_2 ise ipin bir makaradan geçip dikine aşağı sarkan ucunda, herhangi bir

yüzeye değmeden hareket ediyor.

(a) Kütlelerin her biri için serbest cisim diyagramını çizin.

(b) Kütlelerin ivmesini bulun.

(c) İp üzerindeki gerilim kuvveti T'yi bulun.



9
Momentum

Newton'un İkinci Kanunu, belli şartlar altında bazı *korunum kanunları* olmasına neden olur. İkinci Kanun, bir nesnenin diğer cisimlerin (kuvvetlerin) etkisiyle nasıl hareket edeceğini belirler. İkinci Kanuna göre, eğer bir cisme etki eden bütün kuvvetlere ek olarak, cismin belli bir t_0 zamanındaki konumu ve hızı da biliniyorsa, bu cismin bundan sonraki bütün zamanlardaki hareketi bellidir. Toplam kuvvet her bir andaki ivmeyi verir. İvme, hızın nasıl değiştiğini belirler. Yeni hız da parçacığın bir sonraki anda nerede olacağını belirler. Kuvvetler parçacığın konumuna, belki ayrıca hızına da bağlı olabilirler. Parçacığın (yeni hızıyla) geldiği yeni noktada, yeni kuvvet değerleri onun ivmesini belirler ve hareket İkinci Kanunun anlattığı şekilde devam eder:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{9.1}$$

Kimi zaman nesnenin kütlesi hareket esnasında değişebilir: Nesne buharlaşabilir, patlayabilir, parçalara ayrılabilir veya jet uçakları ya da roketler gibi, kütlesinin bir kısmını dışarı atabilir. Deneyler bu gibi durumlarda toplam kuvvetin aslında sadece hız **v**'nin değil, *m***v**'nin değişme oranını belirlediğini gösteriyor:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\mathbf{v} + m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{9.2}$$

En genel durumda cisme etki eden toplam kuvvet *m***a**'yı değil de "*Momentum*" denilen **p** = *m***v** niceliğinin zamanla değişimini belirliyor. Denklem (9.2), Newton'un İkinci Kanununun doğru genel biçimidir. Kütle çoğu zaman hareket sırasında değişmiyor. Bu durumda denklem (9. 2)'nin birinci terimi sıfır olduğundan Newton'un İkinci Kanununun daha tanıdık hali olan denklem (9. 1) elde ediliyor.

Örnek

Bir arabaya 60 km/sa hızla çarpan bir kamyonun uyguladığı kuvvet, bu arabaya başka bir arabanın yine 60 km/sa hızla çarparak uyguladığı kuvvetten çok daha fazladır. Sadece sürat değil, kütle de önemli.

Soru

6 km/sa hızla koşarken bir cam kapıya çarpmanızın etkisiyle oluşan kuvveti tahmin edin. Cam kapı sizi yaklaşık 2 saniyede durdurur (hızınızı 6 km/sa'den 0 km/sa'ye 2 saniyede düşürür).

Newton'ın Birinci Kanunu da kütlenin sabit kalmadığı durumları kapsayacak şekilde şöyle ifade ediliyor: *Bir nesne üzerindeki toplam kuvvet sıfır ise "momentum korunmuş" olur,*

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \tag{9.3}$$

Kuvvet sıfırsa herhangi bir t zamanındaki momentum, hareketin ilk gözlendiği t_0 başlangıç zamanındaki momentum neyse odur.

$$\mathrm{p}(t) = \mathrm{p}(t_0) = \textit{sabit}.$$

Şimdi birçok parçadan oluşan bir sistem için Newton'un İkinci Kanununu inceleyelim. İlk olarak birbirileriyle ve dış dünyayla etkileşim içinde olan sadece iki cismi ele almak yeter. İki bileşenli bir sistemin nasıl işlediğini bir kere gördük mü bunu üç, dört ve daha çok cisimden oluşan sistemlere genelleştirmek kolay.

$$\frac{d\mathbf{p_1}}{dt} = \frac{d(m_1\mathbf{v_1})}{dt} = \mathbf{F}_{2,1} + \mathbf{F}_{\text{dış},1} \tag{9.4}$$

$$\frac{d\mathbf{p_2}}{dt} = \frac{d(m_2\mathbf{v_2})}{dt} = \mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{\text{dış},2} \tag{9.5}$$

Burada m_i, i cisminin kütlesi, $\mathbf{v}_i$ bunun hızı, $\mathbf{p}_i$ ise momentumu (iki tane cisim var, o yüzden $i = 1, 2$). $\mathbf{F}_{2,1}$ cisim 2'nin cisim 1'e uyguladığı kuvvet, $\mathbf{F}_{\text{dış},1}$ ise cisim 2 hariç bütün nesnelerin (cisim 1 ve 2'den oluşan sistemin dışında kalan bütün nesnelerin) cisim 1'e uyguladığı kuvvet. Bunun gibi, $\mathbf{F}_{1,2}$ ve $\mathbf{F}_{\text{dış},2}$ de cisim 2 üstünde sırasıyla cisim 1'in ve dünyanın geri kalanının uyguladığı kuvvetler.

Newton'un Üçüncü Kanunu der ki:

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1} \tag{9.6}$$

Bunu kullanıp denklem (9.4) ve (9.5)'i toplayarak, cisim 1 ve 2'den oluşan bileşik sistem için Newton'un İkinci Kanununu buluyoruz:

$$\frac{d\mathbf{p_1}}{dt} + \frac{d\mathbf{p_2}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{dış},1} + \mathbf{F}_{\text{dış},2} \tag{9.7}$$

$$\frac{d\mathbf{p_{toplam}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{dış},toplam} \tag{9.8}$$

Toplam momentum $\mathbf{p}_{toplam} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}$, dış kuvvetlerin toplamına göre değişiyor:

$$\mathbf{F}_{\text{dış},toplam} = \mathbf{F}_{\text{dış},1} + \mathbf{F}_{\text{dış},2} \tag{9.9}$$

Bir sistemin parcaları arasındaki iç kuvvetler toplam momentumu etkilemez; eğer dış kuvvet yoksa $\mathbf{p_1}$ ile $\mathbf{p_2}$'nin ikisi de zamanla değişebilir ama $\mathbf{p}_{toplam}$ değişmez.

Dış kuvvetlerin toplamı sıfırsa, sistemin toplam momentumu korunur.

9.1 ÇARPIŞMALAR

İki parçacıktan oluşan yalıtılmış bir sistem düşünün. *Yalıtılmış* demek, sistemin üzerindeki toplam dış kuvvet sıfır demek. Bu durumda toplam momentum sabit:

$$\mathbf{p}_{1,i} + \mathbf{p}_{2,i} = \mathbf{p}_{1,s} + \mathbf{p}_{2,s} \tag{9.10}$$

Burada *i* iki parçacığın, parçacık 1 ve parçacık 2'nin ilk momentumunu, *s* de bunların son momentumunu ifade ediyor. İlk durumda iki parçacık birbirine çok uzak ama birbirine yaklaşmakta olsunlar. Başlangıçta, iki parçacık birbirinden çok uzaktayken, birbirlerine uyguladıkları kuvvetler çok zayıf, hemen hemen sıfırdır; $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1} = 0$. Bu, neredeyse bütün kuvvetler için doğrudur: Parçacıklar birbirine uzakken aralarındaki kuvvet asimptotik olarak sıfırdır. Her parçacık üstündeki iç kuvvet sıfır olduğu zaman parçacıkların her birinin momentumu da sabit oluyor. Birbirilerine uzakken iki parçacık da sabit momentumla hareket etmeye devam ediyorlar. Birbirilerine yaklaştıkça birbirilerine uyguladıkları iç kuvvetler de artıyor. İç kuvvetlerin büyüklüğü arttıkça her iki momentum da birbirinin aksi yönlerde değişmeye başlıyor. Parçacıklar yaklaştıkça kuvvetler artıyor, momentumlar da daha hızlı değişmeye başlıyor. Artık iki parçacık da eğri (ivmeli) bir yol izlemekteler. Aralarındaki kuvvet çekim kuvveti olsa bile birbirilerinin içine düşmüyorlar, çünkü bir miktar yana doğru hareketleri de var (bunu açısal momentumun korunumunu işlerken göreceğiz). Sonunda bu eğri yol parçacıkların birbirinden uzağa doğru hareket etmesine yol açıyor. Uzaklaştıkça bu sefer aralarındaki iç kuvvetler (etkileşimler) zayıflıyor. Momentum daha az değişiyor ve parçacıklar birbirinden çok uzaklaştığında asimptotik olarak yine sabit oluyor, bu karşılaşma $\mathbf{p}_{1,s}$ ve $\mathbf{p}_{2,s}$ son momentumlarıyla bitiyor.

İşte böyle bir karşılaşmaya *çarpışma* denir. Çarpışma sırasında iki momentum da değişti:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta p}_1 &= \mathbf{p}_{1,s} - \mathbf{p}_{1,i} \\ \mathbf{\Delta p}_2 &= \mathbf{p}_{2,s} - \mathbf{p}_{2,i}.\end{aligned} \tag{9.11}$$

Momentumun korunumundan dolayı,

$$\mathbf{\Delta p}_2 = -\mathbf{\Delta p}_1 \tag{9.12}$$

Parçacık 1'e parçacık 2'nin uyguladığı kuvvetten kaynaklanan parçaçık 1'in momentumundaki net değişmeye ($\Delta\mathbf{p}_1$) *parçacık 2'nin parçacık 1'e etkisi* denir. Aynı şekilde, $\Delta\mathbf{p}_2$ de parçacık 1'in parçacık 2 üzerindeki etkisidir.

Newton'un İkinci Kanunundan yola çıkarak, etki şöyle hesaplanabilir:

$$\mathbf{\Delta p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{d\mathbf{p}_1}{dt}\right) dt = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{2,1} dt \tag{9.13}$$

Newton'un Üçüncü Kanunu ile, parçacık 2'nin parçacık 1'e etkisinin, parçacık 1'in parçacık 2'ye etkisinin tersinden (negatifinden) ibaret olduğunu görüyoruz:

$$\mathbf{\Delta p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}\right) dt = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{1,2} dt = \int_{t_i}^{t_f} -\mathbf{F}_{2,1} dt = -\mathbf{\Delta p}_1 \tag{9.14}$$

Bu sonuç doğrudan, toplam momentumun korunumundan da çıkarılabilir (Denklem 9.10)

9.2 KÜTLE MERKEZİ

Sistemin toplam momentumu, toplam kütlenin hareketiyle ilişkilidir. Toplam momentumla ve toplam kütleyle ilişkili bir hız tanımı yapılabilir:

$$\mathbf{p}_{toplam} = (m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2}) \equiv (m_1 + m_2)\mathbf{V}_{\mathrm{KM}} \tag{9.15}$$

Buna göre,

$$\mathbf{V}_{\mathrm{KM}} = \frac{(m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2})}{(m_1 + m_2)} \tag{9.16}$$

İşte bu, "*kütle merkezinin*" hızıdır. Öyleyse kütle merkezinin konumu $\mathbf{R}_{\mathrm{KM}}$ de şöyle tanımlanır:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{KM}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2}}{m_1 + m_2}\right) \equiv \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{KM}}}{dt} \tag{9.17}$$

$$\mathbf{R}_{\mathrm{KM}} \equiv \frac{m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2}}{m_1 + m_2} \tag{9.18}$$

Burada $\mathbf{r_1}$ ve $\mathbf{r_2}$ iki cismin konumlarıdır. Sistemin toplam kütlesi $M \equiv m_1 + m_2$ değişmiyorsa Denklem 9.8, 9.15 ve 9.17'yi kullanarak

$$\mathbf{F}_{\text{dış},toplam} = M\frac{d^2\mathbf{R}_{\text{KM}}}{dt^2} \tag{9.19}$$

sonucuna ulaşırız: Dış kuvvetler kütle merkezinin hareketini Newton'un İkinci Kanununa göre, sistem toplam kütlesi o noktada toplanmış bir parçacıkmış gibi belirler.

Bileşik sistemde kütle merkezinin hareketini dış kuvvetler belirler. İç kuvvetlerse parçaların kütle merkezine göre nasıl hareket edeceğini belirler. Bir örnek olarak Dünya ve Ay sistemini ele alalım. Bunların ikisi de Güneş'in kütleçekimiyle ona doğru çekiliyorlar. Güneş tarafından hem Dünya hem de Ay'a uygulanan dış kuvvetler var. Dünya ve Ay sistemi, toplam dış kuvvetin çekimiyle Güneş'in etrafında hareket ediyor. Dünya ve Ay sisteminin kütle merkezi Dünya'nın merkezine daha yakın, Dünya'nın içinde kalıyor, çünkü Dünya'nın kütlesi Ay'ın kütlesinden çok daha büyük. Bu kütle merkezi, Güneş'in çevresinde bir yörünge üzerinde hareket ediyor. Hem Dünya hem de Ay, kütle merkezinin etrafında da hareket ediyorlar. Bu yörüngeleri hemen hemen dairesel. Dünya ile Ay'ın, kütle merkezinin etrafındaki hareketleri, ikisinin *arasındaki* kütleçekimi kuvvetinden, *iç* kuvvetten kaynaklanıyor.

PROBLEMLER

1. 1 ton kütlesinde küçük bir roket, x yönünde 600 m/s hızla yatay olarak hareket ediyor. Roket üzerindeki toplam dış kuvvet sıfır. 10 kg jet gazı, (x yönünde) yere göre – 6000 m/s hızla dışarı atılıyor. Gazın dışarı atımı Δt = 1 s zaman aralığında sabit kalıyor.
   (a) Jet gazı atıldıktan sonra roketin hızı nedir?
   (b) Dışarı atılırken jetin rokete uyguladığı kuvvet (vektör olarak) nedir?
2. İki cisimden pek çok cisme genelleme yapmak:
   (a) Birbiriyle etkileşim içindeki üç cisimden oluşan bir sistem düşünün. Her cisim için hareket denklemini yazın, bunun içinde her cisim çifti arasındaki iç kuvvetler ve her birinin üzerindeki dış kuvvet de olsun. (9.4)'ten (9.9)'a kadarki denklemleri üç cisimli sistem için tekrar edin. Bu sistemin kütle merkezi $\mathbf{R}_{\text{KM}}$'yi ifade edin.
   (b) Aynı şeyi N tane cisimden oluşan bir sistem için tekrar edin.
3. Dünya-Ay sisteminin kütle merkezinin yerini bulun. Bu kütle merkezi, Dünya'nın kendi kütle merkezinden ne kadar uzakta? Peki ya Ay'ın kütle mer-

kezinden?
Dünya'nın kütlesi $6{,}0 \times 10^{24}$ kilogram, Ay'ın kütlesi $7{,}4 \times 10^{22}$ kilogram, Ay'ın merkezinin Dünya'nın merkezine mesafesi 384.400 km. Bu problemi çözmenizde size yol gösterecek bir şekil çizin. Koordinat merkezini Dünya'nın merkezine koyun.

4. Laboratuvarda sürtünmesiz bir hava masasında iki kutunun hızlarını $\mathbf{v}_1 = (3\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ m/s ve $\mathbf{v}_2 = (3\mathbf{i}\ 3\mathbf{j})$ m/s olarak ölçtünüz. Kutuların kütleleri $m_1 = 2$ kg ve $m_2 = 1$ kg. İki kutunun ilk konumları ise, $\mathbf{r}_{1,0} = \mathbf{i}$ m ve $\mathbf{r}_{2,0} = (\mathbf{i} + 6\mathbf{j})$ m.
   (a) Parçacıklar masa üzerinde hareket ederken, iki parçacığın vektör ko- numları $\mathbf{r}_1(t)$ ve $\mathbf{r}_2(t)$ nedir?
   (b) Zamanın fonksiyonu olarak kütle merkezinin konumu $R_{KM}(t)$ nedir?
   (c) Kütle merkezinin hızı $\mathbf{V}_{KM}$ nedir?
   (d) Her iki kutunun ve kütle merkezinin yörüngelerini çizin.
   (e) İki kütlenin, kütle merkezine göre hızları nedir?

$$\mathbf{v}_{1,cm} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_{KM} = ?$$

   İkinci kutu için de aynı hesabı yapın.

   (f) Her kutunun kütle merkezine göre momentumu nedir?
   (g) Her kutunun, zamanın bir fonksiyonu olarak kütle merkezine göre konumu nedir?
   (n) Kütle merkezinden göründüğü şekliyle kutuların yörüngelerini çizin.
   (i) Kütle merkeziyle birlikte hareket eden biri tarafından ölçülmüş haliyle momentum vektörlerini çizin.
   (j) İki cisim ne zaman çarpışacak?
   (k) Toplam kinetik enerji ne kadar?
   (l) Çarpışma esnektir. İki kutu çarpışmadan sonra nasıl hareket eder?

   Not: *Bu soruyu 10. Bölümden, esnek çarpışmaları okuduktan sonra yapın.*

5. Bu problemde iki cismin, kütle merkezlerine göre hareketini genel olarak inceleyeceğiz. m_1, m_2 kütlesinde, $\mathbf{r}_1(t)$ ve $\mathbf{r}_2(t)$ konumunda, $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ hızında iki cismi ele alalım.
   (a) Denklem (9.16)'da verilen kütle merkezi hızını kullanarak, her bir cismin, kütle merkezine göre hızı nedir?
   (b) Kütle merkezine göre (*"kütle merkezli referans çerçevesinde"*) her bir cismin momentumu nedir?
   (c) Toplam kinetik enerji ne kadardır? Toplam kinetik enerjiyi $KE_{toplam} =$

$p^2_{KM}/(2\mu)$ olarak, her bir cismin momentumu p_{KM} ve *"etkin (indirgenmiş) kütle"* μ cinsinden ifade edin. μ'yu m_1 ve m_2 cinsinden ifade edin.

(d) Bu iki cisim, elastik bir çarpışmadan sonra kütle merkezli referans çerçevesinde nasıl hareket edecek?

Hareketin, kütle merkezinden gözlendiği haliyle özellikle basit olduğunu gördük. Bir sistemin parçaları arasındaki çarpışmaları ve etkileşimleri (iç hareketleri) kütle merkezi çerçevesinden takip edip, ardından sonuçları istenen başka bir çerceveye (koordinat sistemine) aktarmak daha kolay.

10
Enerji

Newton'un İkinci Kanunu, belli şartlar altında *korunum kanunları* olmasına yol açar. Toplam (dış) kuvvetin sıfır olması halinde geçerli olan momentumun korunumu kanununu öğrendik. **F** = *m***a**'dan çıkan diğer önemli korunum kanunları, 13. Bölümde işleyeceğimiz *açısal momentumun korunumu kanunu* ile, aşağıda Newton'un İkinci Kanunundan türeteceğimiz, herhalde herkesin bir yerlerden duymuş olduğu *enerjinin korunumu kanunudur*. Hareket denkleminin *x* bileşenini alalım,

$$F_x = m\frac{dv_x}{dt} \tag{10.1}$$

İki tarafı da *dx/dt* = *vx* ile çarparsak şunu buluyoruz:

$$F_x\frac{dx}{dt} = mv_x\frac{dv_x}{dt} \qquad veya \quad F_x dx = mv_x dv_x \tag{10.2}$$

Hareket denkleminin *y* ve *z* bileşenlerine de aynı şeyi yapıp hepsini toplayalım:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) \tag{10.3}$$

Bu, her bir anda cisme etki eden toplam kuvvetin bileşenleri, konumdaki *dx*, *dy*, *dz* anlık değişmeleri (hareketin adımları), anlık hızın bileşenleri ve hızdaki *dvx*, *dvy*, *dvz* anlık değişmeleri arasındaki bir ilişkidir. Bu küçük değişmeler hareket boyunca toplanabilir (integrali alınabilir). Denklemin iki tarafının da integralini alınca şu sonuç çıkıyor:

$$\int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz = m\left(\int_{v_{x,i}}^{v_{x,s}} v_x dv_x + \int_{v_{y,i}}^{v_{y,s}} v_y dv_y + \int_{v_{z,i}}^{v_{z,s}} v_z dv_z\right)$$

Sağ taraftaki hız bileşenlerinin bulunduğu integrali almak kolay:

$$\int [F_x dx + F_y dy + F_z dz] = \frac{1}{2}m[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2]_s - \frac{1}{2}m[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2]_i \tag{10.4}$$

Burada *s* ve *i*, *son* ve *ilk* koşulları ifade ediyor. Bunu şöyle de yazabiliriz:

$$\frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} \tag{10.5}$$

Burada $\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = [F_x dx + F_y dy + F_z dz]$ ifadesi kuvvet vektörü $\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$'nin, çok küçük yer değişimi ya da minicik adım vektörü $\mathbf{dr} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$ ile *iç çarpımı* ya da *nokta çarpımıdır*.

Bu sonuca, "*iş-enerji teoremi*" denir. $mv^2/2$ bileşimi, Newton'un İkinci Kanununun $m\mathbf{a}$ tarafından geliyor. Pek yakında göreceğimiz gibi işe yarayan bir nicelik olduğu için buna bir ad verilmiş: $mv^2/2$'ye "*kinetik enerji*" deniyor. Kinetik enerji cismin hareketinin bir ölçüsüdür. SI birimleriyle, kütle kere hızın karesi için birim kg m^{-2} s^{-2}. Bu birimlerin birleşiminin özel bir adı var: Joule; 1 J = 1 kg m^{-2} s^{-2}.

Denklem 10.5'in sol tarafı, hareketin başı ile sonu arasında kinetik enerjide meydana gelen değişimden ibarettir. Denklemin sağ tarafındaki $\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} \equiv W$'ya, cisim üzerinde toplam kuvvet **F** tarafından "*yapılan iş*" denir. Hareketin her *dr* adımında yapılan azıcık iş, *integralini aldığımız* $\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$, adımın uzunluğu *dr* kere, **F** kuvvetinin **dr** *hareket yönündeki bileşenidir*. Cisim adım adım hareket ederken yapılan küçük küçük bütün işlerin integrali, yapılan toplam iştir. Denklem 10.5 de ifade edilen iş-enerji teoremine göre, kinetik enerjideki değişmenin, toplam kuvvet **F** tarafından cisim üzerinde yapılan işe eşit olması gerekir. Eğer hareketin ayrıntılarıyla ya da $v(t)$'nin hareket boyunca nasıl değiştiği ile ilgilenmiyorsak, Denklem 10.5 bize, ilk hızı bildiğimiz ve yapılan iş için olan integrali çözebildiğimiz sürece son hızı bulmak için bir kestirme yol sağlar.

"*Korunumlu*" kuvvetler denen bazı özel kuvvetler için iş integrali kolaydır: İntegralin sonucu *yalnızca koordinatların* $U(x, y, z)$ diyeceğimiz bir fonksiyonuna eşit çıkar. Öyleyse ilk noktadan (x_1, y_1, z_1) son noktaya (x_2, y_2, z_2) giderken yapılan iş *hareketin izlediği yola ya da hareket ayrıntılarına bağlı değildir*. Korunumlu kuvvetler tarafından yapılan iş yalnızca bu *U* fonksiyonunun ilk ve son noktalardaki değerine bağlıdır:

$$\text{İş} = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -\int dU = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2) \quad \text{(korunumlu kuvvetler için)} \tag{10.6}$$

İşi hesaplamanın bu basit yolunun geçerli olması için, integrali alınan $\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$'nin, yani her adımda yapılan azıcık işin, bu adım atılırken olan çok küçük $-\,dU$ farkına eşit olması gerekir. Zaten *U* 'nun tanımı da şudur:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -dU. \tag{10.7}$$

Buradaki eksi işaretinin konmasının tek nedeni, aşağıdaki sonuçların alışılmış ifadesinde eksi işareti olmasın diyedir. Şimdi, $\mathbf{dr} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} = (dx, dy, dz)$ adımını atarken gerçekleşen böyle bir küçücük değişiklik *dU*; *U*'daki, **dr** adımının

bütün bileşenleri *dx, dy, dz*'den kaynaklanan birleşik değişikliktir:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \tag{10.8}$$

"*Kısmi türev*" $\partial U/\partial x$; sadece *x*'in değişip *y* ve *z*'nin sabit kalması halinde *U*'nun türevini almak demektir. Toplam değişme dU , *x* yönünde *dx* adımından, *y* yönünde *dy* adımından ve *z* yönünde *dz* adımından kaynaklanan değişmelerin toplamıdır. Şimdi mesele, belli bir kuvvet **F** için, o kuvvet tarafından yapılan işin

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -\, dU \tag{10.9}$$

denklemi ile kolayca hesaplanıp hesaplanamayacağıdır.

Denklemin iki tarafını da yazarsak,

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\,(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz) \tag{10.10}$$

Kuvvet, uzaydaki her nokta için şunu sağlamalı:

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{10.11}$$

Kuvvet vektörünün her bileşeni, koordinatların bir fonksiyonu olarak, bu bir tane *U* (*x, y, z*) fonksiyonun ilgili kısmi türevinin negatifi (-) olmalı. Tek bir sayısal (skaler) fonksiyonun *kısmi türevlerinden* oluşan vektöre o fonksiyonun *gradyanı* denir ve bu şöyle gösterilir:

$$\nabla U \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathbf{k} \tag{10.12}$$

Yani, iş integralinin kolay olması ve yalnızca hareketin ilk ve son noktalarını bilmekle hesap edilebilmesi için, kuvvetin $\mathbf{F} = -\nabla U$ niteliğini taşıması gerekir. *Bu niteliği taşıyan kuvvetlere korunumlu kuvvetler denir*. Bu çok özel bir nitelik. Doğadaki bütün kuvvetler bu niteliğe sahip değil. Ama neyse ki önemli temel kuvvetlerin birçoğu korunumlu; kütleçekimi kuvveti de, atomların oluşumundan, maddeyi bağlı tutmaktan sorumlu olan elektrostatik Coulomb kuvveti de böyle kuvvetler. (Coulomb kuvvetini ve atomların yapısını ilerleyen bölümlerde göreceğiz.)

U fonksiyonuna "*potansiyel enerji*" denir. Eğer yapılan işten yalnızca korunumlu kuvvetler sorumluysa, iş-enerji teoremi şöyle olur:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 &= \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} \\ &= -\int dU = -(U_s - U_i) = U_i - U_s \end{aligned} \tag{10.13}$$

Öyle ki

$$\frac{1}{2}mv_s^2 + U_s = \frac{1}{2}mv_i^2 + U_i = \ sabit \equiv Enerji \tag{10.14}$$

İşte bu, *enerjinin korunumu kanunudur*. Şimdi, potansiyel enerji tanımındaki eksi işaretinin, korunum kanunun yukarıdaki son halinde eksi işareti bulunmaması için konduğunu görmüş olduk. Toplam mekanik enerjinin (kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamının) korunduğu durumlarda, ilk koşullara bakarak, son konumlar ve hızlar hakkında, tek *hareket sabiti*, yani enerji üzerinden bilgi sahibi olunabilir. Ortada korunumlu bazı kuvvetler ve korunumlu olmayan bazı kuvvetler varsa, enerjinin korunumu kanunu şu hali alır:

$$\frac{1}{2}mv_s^2 + U_s^{kor} = \frac{1}{2}mv_i^2 + U_i^{kor} + \int \mathbf{F}_* \cdot \mathbf{dr} \tag{10.15}$$

burada U^{kor}, korunumlu kuvvetlerin hepsinden kaynaklanan toplam potansiyel enerji, $\mathbf{F}*$ ise sürtünme gibi korunumlu olmayan bütün kuvvetlerin toplamıdır.

Korunumlu kuvvetlerin iki örneği olan evrensel kütleçekimi kuvveti ile Coulomb kuvvetinin ikisinde de şu biçim vardır:

$$\mathbf{F} \propto r^{-2}\hat{\mathbf{e}}_r$$

Burada r, kuvvetin merkezine (kuvveti uygulayan diğer cisimden olan) mesafe, $\hat{\mathbf{e}}_r$ ise r yönündeki birim vektördür. m kütlesine sahip bir cisme, M kütlesine sahip başka bir cisim tarafından, M kütleli cismin merkezinden $\mathrm{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r$ konumunun bir fonksiyonu olarak uygulanan kütleçekimi kuvvetini ele alalım:

$$F = -\left(\frac{GMm}{r^2}\right)\hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{GMm}{r}\right)\hat{\mathbf{e}}_r = -\nabla U(r) \tag{10.16}$$

Kuvvet yalnızca r'nin bir fonksiyonudur, dolayısıyla potansiyel enerji de yalnızca r'nin fonksiyonu olmalıdır ve potansiyel enerjinin $\hat{\mathbf{e}}_r$ yönündeki kısmi türevi kuvveti verir. Eğer bunu fark etmeyip (x, y, z) koordinatları üstünden $r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$ ile çalışacak olursanız daha uzun hesaplarla yine aynı sonuca varırsınız. (Bu bölümün sonundaki Ek'e bakın).

Dünya'nın yüzeyine yakın yerlerde kütleçekimi çok iyi bir yaklaşıklıkla sabittir, zira hareket eden cismin Dünya'nın merkezine olan mesafesi Dünya'nın yarıçapına hemen hemen eşittir (2. Bölümün sonundaki 1. ve 2. probleme bakın). Yarıçap r'nin belli bir yerde Dünya'nın merkezinden yüzeyine olan yönü, Dünya'nın yüzeyine yakın yerlerdeki küçük hareketler sırasında değişmez. Yarıçap yönünün Dünya yüzeyinden yukarıya doğru olduğunu dikkate alarak buna z yönü deyin, birim vektör de $\hat{\mathbf{k}}$ olsun. Bu durumda kuvvet yaklaşık olarak şudur:

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2}\,\hat{\mathbf{k}} = -mg\,\hat{\mathbf{k}} = -\frac{\partial}{\partial z}(mgz)\,\hat{\mathbf{k}} = -\nabla U(z) \qquad (10.17)$$

$M_{\oplus}$ ve $R_{\oplus}$ sırasıyla Dünya'nın kütlesi ve yarıçapı, g ise Dünya yüzeyindeki kütleçekimi ivmesidir. $\oplus$ işareti Dünya'yı simgeler. Potansiyel enerji fonksiyonu, tandığımız

$$U(z) = mgz \qquad (10.18)$$

halini alır. Bu, *belli bir kuvvetle, yani kütleçekimiyle ilişkili olan potansiyel enerjinin, yalnızca Dünya'nın yüzeyine yakın yerlerde geçerli olan yaklaşık halidir*.

10.1 KORUNUMLU OLMAYAN KUVVETLER

Korunumlu olmayan kuvvetlerin en önemlisi ve en sık rastlanılanı sürtünmedir. Tek boyutta bütün kuvvetler korunumlu olmalıymış gibi görünebilir, çünkü tek boyutlu harekette $Fx(x) = -\partial U/\partial x$'in mutlaka bir çözümü olsa gerek: Her konum fonksiyonu $Fx(x)$ bir şeyin türevi olmalı gibi geliyor. İnsan ilk başta potansiyel enerjinin türevinin negatifinin kuvveti verdiği bir potansiyel enerji fonksiyonu illa ki bulunur diye düşünüyor. Gelgelelim sürtünme *sadece konumun bir fonksiyonu bile değildir*: Sürtünme yalnızca konumla, nesnenin durduğu yerle belirlenmez; sürtünme hıza da bağlıdır; tek boyutta dahi sürtünme, nesnenin ne yönde hareket ettiğine bağlıdır. x'in olabileceği bütün noktalar için, sürtünme kuvveti her zaman hareket yönünün tersinde olmalıdır (veya statik sürtünme için, bütün diğer kuvvetlerin bir sonucu olarak, hareket etme eğiliminin yönünün ters yönünde olmalıdır), yani eğer hareket sola doğruysa sürtünme kuvveti sağa doğru etki eder, hareket sağa doğruysa sürtünme sola doğrudur. Sürtünme kuvvetinin yönü harekete bağlıdır, yalnızca x koordinatına bağlı değildir. Eğer sürtünme kuvvetine denk gelen $U_{sr}(x)$ diye bir potansiyel enerji olsaydı, bu $U_{sr}(x)$'in gradyanı ne olacaktı?! Kısacası, tek boyutta bile, sürtünme (ve *hızın* yönüne ve/veya büyüklüğüne bağlı olan hiçbir kuvvet) korunumlu olamaz.

Sürtünme tarafından yapılan iş her zaman negatiftir çünkü bir sürtünme kuvveti $\mathbf{F}_{sr}$ daima **dr** ile ters yöndedir. Sürtünme tarafından yapılan iş ısı üretir. Çünkü mikroskobik düzeyde sürtünme kuvvetleri temel kuvvetler bakımından ifade edilirken bu temel kuvvetler korunumludur; yapılan iş aslında, sistemin parçalarının mikroskobik hareketlerinde kinetik ve potansiyel enerjileri değiştirir. Mikroskobik düzeyde, enerji, temel etkileşimlerle korunmaktadır. Makroskobik açıdan bakınca, kütleçekimi gibi büyük ölçekli korunumlu kuvvetler hissedilir ama ayrıntılı mikroskobik kuvvetlerin etkileri fark edilmez. Bu kuvvetler bir araya gelince sürtünme gibi korunumlu olmayan kuvvetler ortaya çıkar, bunlar tarafından yapılan iş de enerjiyi rasgele mikroskobik kanallara aktarır. Bu enerji aktarımına *ısı transferi* denir.

10.2 POTANSİYEL ENERJİ

Potansiyel enerji yüzeyine basit bir örnek, yeryüzüdür. Dünya'nın yüzeyine yakın yerlerde kütleçekimi potansiyel enerjisi sadece yükseklikle orantılıdır. Tepelerin, vadilerin olduğu bir yer düşünün. Bir tepenin üstü, yanındaki vadinin dibinden daha fazla potansiyel enerjiye sahiptir. Yeryüzündeki her noktanın deniz seviyesinden yüksekliğini işaretlerseniz, bütün bu noktaların yükseklikleri bir yüzey oluşturur (Şekil 10.1). "Yatay" x ve y koordinatlarının bir fonksiyonu olarak dikey z koordinatını veren ifade yüzeyi tanımlar. Bu, Dünya'nın gerçek yüzeyidir işte. Nehirlerin akışını, bir taşın yokuş aşağı yuvarlanışını belirleyen, yeryüzü, yani potansiyel enerji yüzeyidir.

Bilimde pek çok problemde, kuvvetlerin etkileri potansiyel enerji yüzeyleri olarak tanımlanabilir. Potansiyel enerji yüzeyinin eğimi, kuvvetinin yönünü ve gücünü verir. Bütün kuvvetlerin potansiyel enerji üzerinden tanımlanması mümkün değil. Sürtünme kuvvetleri potansiyel enerji üzerinden tanımlanamaz. Fakat önemli birçok kuvvet potansiyel enerji yüzeyleriyle tanımlanabilir. Kütleçekimi buna bir örnek. Bir başka önemli örnek de elektrostatik kuvvet. Elektromanyetizmayı işlerken, birim yük başına elektrostatik potansiyel enerji olarak tanımlanan *voltajın* çok önemli bir nicelik olduğunu göreceğiz. Yüklü parçacıklar ve elektrostatik kuvvetlerin olduğu bir durumda, uzayın her noktasında voltajın ne kadar olduğunu bilmek işimize yarar. Eğer yükler bir düzlemde hareket ediyorsa, düzlemin her (x, y) için z koordinatı olarak voltajı göstermek suretiyle bir potansiyel enerji yüzeyi oluşturabiliriz. Eğer üç boyutlu bir problemde, her (x, y, z) noktası için voltajı göstermek istiyorsanız, potansiyel enerji yüzeyinin resmini veya modelini yapamazsınız; çünkü üç boyutlu bir dünyada yaşıyoruz ve (x, y, z) üç koordinatına göre bir de dördüncü boyut olarak voltajı görselleştirmemiz, göstermemiz veya modelini yapmamız mümkün değil. Ama (x, y, z)'nin bir fonksiyonu olarak voltaj "yüzeyinin" matematiksel özellikleri, gözle görebildiğimiz yüzeylerin özelliklerine benziyor.

Pek çok problemde, potansiyel enerji sadece birtakım nesnelerin konumlarından ibaret olmayan koordinatlara bağlıdır. Potansiyel enerji, diyelim 25 atomdan oluşan bir molekülde, her atom çiftinin arasındaki mesafeye de bağlı olabilir. Böyle bir durumda potansiyel enerji 300 farklı mesafeye bağlı olacaktır.

Soru

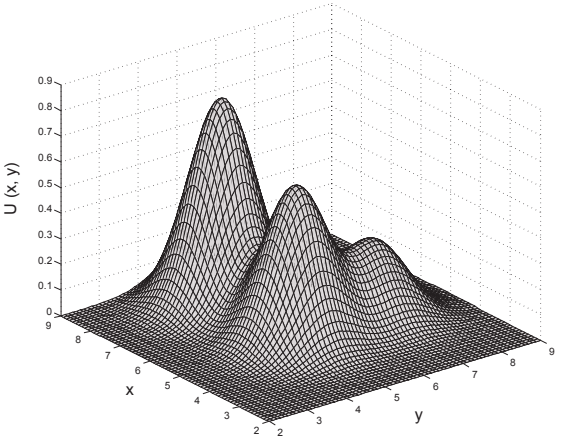
300 sayısı nereden çıktı?

Buna ek olarak, potansiyel enerji atomları birbirine bağlayan hatlar arasındaki açılara da bağlı olabilir. Yani çok ama çok sayıda koordinat vardır. 300 (ya da 560, artık her neyse) koordinatın her değer seti, 300 boyutlu bir uzayda bir noktadır. Bu noktada bir potansiyel enerji U değeri vardır. U'nun 300 koordina-

ta göre değerini işaretlemek, 301 boyutlu bir uzayda bir yüzey verir. Potansiyel enerji yüzeylerini ele alan matematiğin büyük bölümü, eldeki problemin boyutları (koordinat sayısı) ne olursa olsun birbirine benzer. Burada ne gibi ilgi çekici şeyler olabileceğini, bir yeryüzü parçasında ne gibi yapılar oluşabileceğini inceleyerek görebiliriz. Bunun için önce potansiyel enerji yüzeylerinin en basitini inceleyeceğiz. Bu problemde tek bir koordinat var. Potansiyel enerji, bir parçacığın, diyelim ki x ekseni üzerinde olan konumuna bağlı. O zaman bunun resmini, grafiğini çizebiliriz. Defterinizde ya da bilgisayarınızda çizeceğiniz iki boyutlu bir grafik, x'in fonksiyonu olarak dikey eksende $U(x)$ potansiyel enerjisini gösterecektir. Dünya yüzeyine yakın yerde kütleçekimi potansiyel enerjisi söz konusu olduğunda bu, gerçek bir yeryüzü parçasındaki tepelerin, vadilerin kesiti olabilir: Bu özel durumda potansiyel enerji $U(x)$ sadece rakımla (z) orantılıdır, $U(x) \cong mgz$; dolayısıyla yeryüzünün bir kesiti yani $z(x)$, veya yeryüzünün tamamı yani $z(x, y)$, bir yandan da potansiyel enerji $U(x)$ veya $U(x, y)$'nin gerçek bir resmidir.

Egzersiz

Bu resimlerin bir işe yarayacağı gerçek bir problem örnek verin!

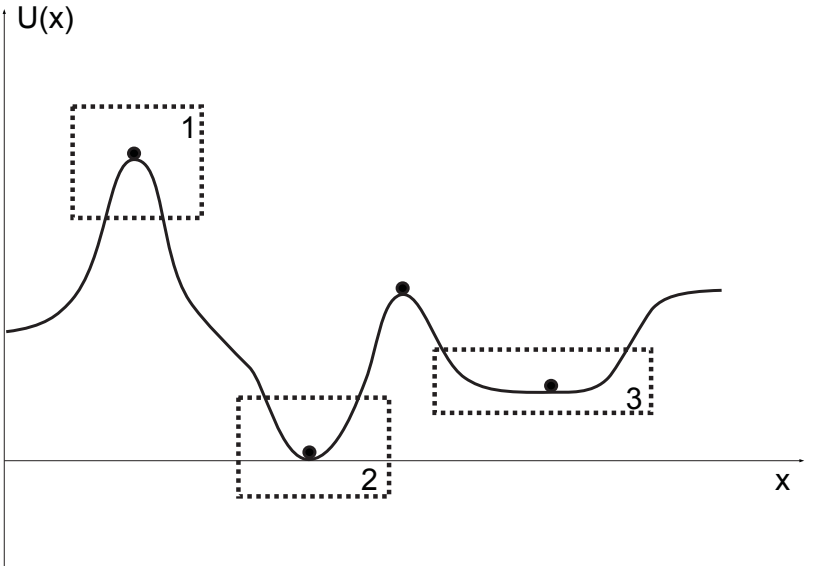


Şekil 10.1

Bir grafiğin ya da yüzeyin bazı *minimum* noktaları olacaktır. Bunlar, çevredeki bütün noktalardan daha az potansiyel enerjiye sahip yerlerdir. Eğer bir parçacık böyle bir noktaya yerleştirilmiş ve durur vaziyetteyse, durduğu yerde öylece kalacaktır. Hiç kinetik enerjisi yoktur. Sadece potansiyel enerjisi vardır. Bu onun

toplam enerjisidir. Potansiyel enerji *minimumda* olduğu için, parçacığı çevredeki başka bir noktaya hareket ettirecek enerji yoktur!

Bütün bu potansiyel enerji tanımı sadece kuvvetlerin sistem üzerindeki olası etkilerini tanımlamanın bir yoludur. En basit sistemi düşünün, bir parçacık tek boyutta hareket ediyor olsun. Newton'un İkinci Kanununa göre, duran bir parçacık, üzerinde etki eden hiçbir net kuvvet yoksa, olduğu yerde *kalır*. Parçacık, potansiyel enerjinin minimum olduğu noktada durur vaziyette olacaktır. Yani bu minimum potansiyel enerji noktası, parçacığın üzerinde hiçbir net kuvvetin olmadığı özel bir noktadır.



Şekil 10.2

Potansiyel enerji yüzeylerinin minimum noktaları, sıfır net kuvvet demektir. Minimum potansiyel enerji noktasına *denge noktası* denir. Eğer parçacık, minimum potansiyel enerjiye yakın bir yere, vadinin tabanına yakın ama en dipte olmayan bir yere konursa ve başlangıçta durur vaziyetteyse ne olur?

Parçacığı Şekil 10.2'de 2. çerçevedeki denge noktasına koyun. Bıraktığınız zaman hareket etmeyecektir. Eğer parçacığı minimumun *yakınında* herhangi bir yere bırakırsanız, durduğu yerden harekete geçecek ve denge noktasına doğru gidecek.

Minimuma yakın yerlerde, kuvvetler minimum (denge) noktasına *doğru* olur! Durma vaziyetindeki parçacık, denge noktasına doğru hızlanıyor. Sürat kazanıyor. Denge noktasına vardığında zaten belli bir süratle hareket etmekte, bu yüzden denge noktasını *geçiyor*. Öteki tarafa gidiyor. Şimdi "yokuş yukarı" çık-

makta. Kuvvetler hâlâ denge noktasına doğru; yani kuvvetler artık parçacığın hızının "ters" yönünde. Bu sefer kuvvetler parçacığı yavaşlatıyor. Parçacık, hızının sıfır olduğu bir noktaya varacak. Orada bir an duracak.

Unutmayın, kuvvetler *daima denge noktasına doğru* işaret eder, bu yüzden parçacık şimdi yine yokuş aşağı, denge noktasına doğru ivmeleniyor. Sürat kazanıyor, denge noktasını geçiyor, başladığı yere doğru yokuş yukarı hareket ediyor, orada bir an için duruyor ve aynı şeyleri tekrar ediyor.

Buna enerji açısından bakalım. Başlangıçta parçacığın hiç kinetik enerjisi yoktu. Durduğu yer denge noktasından daha yüksekteydi, bu yüzden de *denge noktasına nazaran* biraz potansiyel enerjisi vardı. Denge noktasındaki potansiyel enerji değerini sıfır kabul edelim. O halde ilk konumdaki potansiyel enerji bundan daha yüksekti, pozitif bir değeri vardı. Parçacık aşağı doğru gidip denge noktasını geçiyor. Denge noktasından geçmekte olduğu anda yalnızca kinetik enerjisi var.

Öteki tarafta yokuş yukarı giderken, toplam enerjisinin tamamının potansiyel enerji olduğu, hiç kinetik enerjisinin olmadığı bir noktaya kadar çıkacak. İşte bu, anlık durma noktası. Parçacığın anlık sürati sıfır. Madem ki potansiyel enerji, kütleçekimi potansiyel enerjisinde olduğu gibi sadece yükseklikle orantılı, o zaman parçacık ilk başladığı yerin yüksekliğine kadar çıkacak. Eğer dip seviyelerde potansiyel enerji yüzeyinin şekli simetrik değilse, dönüş noktasının denge noktasına mesafesi, başlangıç noktasının denge noktasından uzaklığından daha farklı olabilir (Şekil 10.2'ye bakın). Her halükârda parçacık denge noktasından gelip geçerek onun civarında hareket eder, başlangıç noktasıyla dönüş noktasının daha ötesine hiç ulaşamaz.

Soru

Potansiyel enerjiye bir sabit sayı ekleseniz, öyle ki minimum değer sıfır değil de başka bir sayı, diyelim 5 m veya -3 m olsa, bütün yüzey de buna göre yükselse veya alçalsa, bu durum her noktadaki kuvvetleri ve denge noktalarının yerlerini değiştirir mi?

Bir minimum enerji noktası civarında başlayan hareketler daima o civarda kalırlar. Bu hareketlerin, başlangıçtaki koşulların belirlediği enerji miktarları ancak buna izin verir. Bu yüzden minimum potansiyel enerji noktalarına "*kararlı denge noktaları*" denir.

Şimdi yine aynı potansiyel enerji yüzeyinde hareketi düşünelim, ama bu sefer sürtünme kuvvetleri de olsun. Parçacığın hareketini denge noktasına yakın bir yerden başlatalım. Bu sefer parçacık yokuş aşağı her inişinde sürat kazanacak: Kütleçekimi potansiyeli, parçacığı her zaman denge noktasına doğru hızlandırır.

Fakat parçacık ne yöne giderse gitsin, sürtünme kuvveti parçacığın hareketinin ters yönündedir. Sürtünme kuvveti için denge noktası ya da onu ilgilendiren başka bir özel nokta yoktur. Sürtünme kuvveti hıza bağlıdır ve daima hareketi frenleme yönünde etki eder. Net etki, parçacığın ileri geri birkaç defa gidip geldikten sonra durmasıdır, bu da onun başlangıçtaki koşullarına bağlıdır. Başlangıç koşulları; başlangıç noktası ve başlangıç hızıdır. Bu koşullar başlangıçta elde olan toplam mekanik enerjiyi belirler. Parçacık sürtünmeyle sürekli enerji kaybeder. Toplam potansiyel + kinetik *mekanik* enerji *korunmaz*. Parçacık yokuş yukarı her çıkışında daha az bir yüksekliğe çıkar. Sonunda tam denge noktasında durur ve orada kalır.

Soru

Parçacık neden başka bir yerde değil de denge noktasında duruyor?

Unutmayın ki potansiyel enerji atomlar arasındaki uzaklıkların, birbirine komşu atomlar arasındaki kimyasal bağların birbirine göre açılarının ve kuvvetleri, potansiyel enerjileri tanımlayan her türlü parametrenin koordinatlarının bir fonksiyonudur. Mesela kararlı denge durumunda bulunan bir protein molekülünü düşünelim. Bu durum bir vadinin dibinde duran bir parçacığın durumuna benzer. Şimdi bunun düzenini biraz değiştirelim, molekülümüzün biçimi oradan geçen bir su molekülü tarafından çarpıtılmış olsun. Molekülümüz kararlı denge durumunun etrafında salınmaya başlar. Bu durum da yokuşun yamacında bırakılan ve vadinin dibi etrafında gidip gelen parçacığın hareketine benzer.

Parçacıklı basit örneğe geri dönelim. Şekil 10.2'de 1. çerçevedeki gibi bir tepenin üstüne yakın yerde ne olur? Parçacığı tam zirveye koyalım, dursun. Orada öyle kalır. Yani potansiyel enerjinin maksimum olduğu zirvede net kuvvet yoktur. Bu bir *denge noktasıdır*. Şimdi de parçacığı zirveye yakın bir yere koyun. Parçacık eğimden *aşağı* iner, yani potansiyel enerjinin maksimum olduğu noktadan *uzaklaşır*. *Potansiyel enerjinin maksimum* olduğu nokta *kararsız denge* noktasıdır: Parçacık eğer tam bu noktanın üstüne konursa orada kalır. Fakat yeri azıcık kaydırılacak olursa, daha da uzaklaşır. Uzaklaştıkça maksimum noktasından daha öteye doğru hız kazanır, böylece uzaklaştıkça daha hızlı uzaklaşır ve kaçıp gider.

Bu durum basit bir *kararsızlık* örneğidir: Küçücük bir ilk tedirgeme (zirveden azıcık uzaklaşmak) daha fazla, daha büyük yer değişikliklerine ve arttıkça artan süratlere yol açar. Buna *pozitif geribesleme* de denir: Sistem, bir ilk koşula onu çoğaltarak, *güçlendirerek* tepki verir. (Bir kararlı denge noktası çevresindeki gidiş geliş, yani salınım sırasında, kuvvetin daima denge noktasına geri dönme yönünde olması ise *negatif geribesleme* örneğidir.)

Parçacık başlangıçta zirveye yakın yerde duran vaziyetteyse, toplam enerjisi, başlangıç potansiyel enerjisinden ibarettir. Bu, tepenin daha aşağı noktalarındaki potansiyel enerjilerden daha yüksektir, dolayısıyla parçacık eğimden aşağı inip zirveden uzaklaştıkça kinetik enerjisi artar. Sürtünmenin devreye girmesi parçacığın zirveden daha yavaş uzaklaşmasına yol açacak, çünkü bu sefer enerjinin bir kısmı harcanacak (ısıya dönüşecek), hepsi kinetik enerji olmayacak. Fakat parçacık yukarı yönde eğimin bir yerinde sürtünme yüzünden durmayacak. Parçacık bir anlığına duracak olsa bile, kütleçekimi onu yine aşağıya doğru harekete geçirirdi. Eğer eğimin hiçbir dip noktası olmasaydı, parçacık sürtünme olsun olmasın durmadan zirveden uzağa kaçmaya devam ederdi. Ama gerçek yeryüzünde her aşağı doğru eğim sonunda bir vadiye ya da ovaya varıyor. Benzer şekilde, doğadaki durumları tanımlayan gerçek potansiyel enerji yüzeylerinin çoğunda da hiçbir vadi yükselen eğimlerle sonsuzca çevrili değil, hiçbir zirve de dipsiz uçurumlarla çepeçevre kuşatılmış değil. Potansiyel enerji yüzeylerinde *minimumlar*, yani *kararlı* denge noktaları, *maksimumlar* yani *kararsız* denge noktaları olur, düz kısımlar da olabilir.

Şimdi de yeryüzünün düz bir kısmına bakalım, Şekil 10.2'de 3. çercevede gördüğümüz gibi. Önce, hiç sürtünme yoksa ne olacağını düşünelim. Eğer parçacık, düzlüğün bir yanındaki eğim üzerinde bir noktadan serbest bırakılıyorsa yokuş aşağı inerken hızlanacak ve düzlük boyunca sabit hızla hareket edecek, çünkü dümdüz yatay alanda hiçbir yatay kuvvet yok. İlk başta parçacığın bütün enerjisi potansiyel enerjiydi. Düzlüğe inip onu kat ettikçe bu sefer bütün enerjisi kinetik enerji oldu. Düzlüğün diğer ucunda parçacık bir eğime varıyor. Yokuş yukarı hareket ediyor, kütleçekimi kuvveti hareketin ters yönünde. Kütleçekimi parçacığın hareketini yavaşlatıyor (onu frenliyor). Parçacık başlangıçtaki yüksekliğine kadar tırmanacak. Buradaki potansiyel enerjisi başlangıçtaki potansiyel enerjisiyle aynı, bu da toplam enerjiye eşit zaten. Dolayısıyla, başlangıç noktasıyla aynı yüksekliğe sahip olan dönüş noktasında parçacığın hiç kinetik enerjisi yok. Düzlüğün iki tarafındaki eğimler simetrik değil, dönüş noktasıyla başlangıç noktası düzlükten aynı yatay mesafede değil, ama aynı yükseklikteler. Parçacık dönüş noktasında bir an için duruyor. Burası kütleçekiminin yukarıya doğru hareketi nihayet durdurduğu nokta. Kütleçekiminin etkisiyle parçacık bu sefer eğim aşağı inmeye başlıyor, bütün enerjisinin kinetik olduğu düzlüğe varıyor, sabit hızla düzlüğü geçip yokuş yukarı tırmanarak başlangıç noktasına geliyor. Sonra bütün hareket yeniden başlıyor. Vadinin dibinde (potansiyel enerjinin minimumu) ister tek bir nokta, ister upuzun bir düzlük olsun, buradaki hareket periyodik olur, parçacık denge alanından tekrar tekrar geçer ama hiçbir zaman fazla uzağa gidemez, sahip olduğu enerjinin sınırı olduğu için her seferinde geri döner.

Bu sefer düzlüğe sürtünmeyi ekleyelim. Parçacık düzlükten her geçişinde kinetik enerjisinin bir kısmını harcayacak. Böylece eğimlerden birine her tırmanışında daha aşağıda bir dönüş noktasına kadar çıkabilecek. Sonunda da duracak.

Durduğu yer mutlaka düzlük olacak. Ancak statik sürtünme katsayısı yeterince büyükse parçacık eğimin üzerinde durabilir.

Peki enerji nereye gitti?

Soru: $U(x, y)$ gibi bir potansiyel enerji yüzeyi için bir başka tür özel nokta olabilir mi sizce? *Eyer* noktası nedir? Bir resmini yapın.

Potansiyel enerjinin bir $U(x)$ eğrisiyle verildiği tek boyutlu problemlerde olabilecek şeyler işte bunlardan ibaret.

10.3 ESNEK ÇARPIŞMALAR

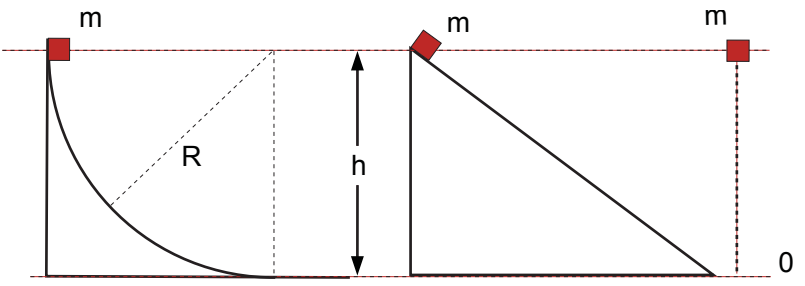
Artık kinetik ve potansiyel enerjiyi ve enerjinin korunumunu öğrendiğimize göre çarpışmaları ve etkileşimleri başka bir şekilde ele alabiliriz. İki cisim etkileşim sırasında birbirinin şeklini değiştirebilir (birbirini deforme edebilir). İki cisim birbirine dokunmadan da olabilir bu: Ay'ın, Dünya'nın okyanusları üzerinde yarattığı gelgiti, Güneş'in kuyrukluyıldızlar üstündeki etkisini düşünün. Deformasyonlar ve cisim içinde bunlardan dolayı oluşan hareketler, mesela suların yükselmesi ve çekilmesi, okyanusta oluşan akıntılar, sürtünme kuvvetleriyle karşılaşacak, bu da mekanik enerjinin bir kısmının ısıya dönüşmesine neden olacak. Çarpışmalarda veya Dünya-Ay sistemi gibi kapalı bir sistemdeki cisimler arasındaki devamlı etkileşimlerde mekanik enerjinin bir kısmı ısıya dönüşerek kaybedilir, toplam mekanik enerji korunmaz. Fakat çarpışmaların birçoğunda ısıya verilen enerji miktarı göz ardı edilebilir düzeydedir ve toplam mekanik enerji çok büyük ölçüde korunur. Bu tür çarpışmalara *esnek çarpışma* denir.

Çarpışmanın ilk ve son durumlarında iki parçacık birbirinden çok uzaktadır ve etkileşimlerinin potansiyel enerjisi son durumda ilk durumda olduğunun aynısıdır, bu da genellikle sıfır kabul edilir. Esnek bir çarpışmada toplam mekanik enerji, ilk durumla son durum arasında büyük ölçüde eşittir, potansiyel enerji de aynıdır, böylece ilk ve son toplam kinetik enerjiler de büyük ölçüde eşit olur. Dış kuvvetlerin olmadığı hallerde korunumlu olan toplam momentuma ek olarak toplam kinetik enerji de korunumlu bir niceliktir. Esnek bir çarpışmada korunum kanunları şunu verir:

$$\mathbf{p}_{1,i} + \mathbf{p}_{2,i} = \mathbf{p}_{1,s} + \mathbf{p}_{2,s} \quad \text{Momentumun Korunması} \tag{10.19}$$

$$\frac{{p_{1,i}}^2}{2m_1} + \frac{{p_{2,i}}^2}{2m_2} = \frac{{p_{1,s}}^2}{2m_1} + \frac{{p_{2,s}}^2}{2m_2} \quad \text{Enerjinin Korunması} \tag{10.20}$$

Elektrostatik kuvvet ve kütleçekimi kuvveti de dahil pek çok kuvvet için, ileride göreceğimiz üzere, *açısal momentum* denen bir özellik de korunur. Açısal momentumun korunumu gereği, son momentum vektörleri $\mathbf{p}_{1,s}$ ve $\mathbf{p}_{2,s}$, ilk momentum vektörleri $\mathbf{p}_{1,i}$ ve $\mathbf{p}_{2,i}$ ile aynı düzlemde olmalıdır. Koordinatlarımızı o düzlemde seçince, momentumun korunumu denklemi, bir vektör denklemi olan Denklem 10.19 bize iki denklem verir, momentumların her bileşeni için bir tane. Böylece esnek çarpışmada (kinetik) enerjinin korunumu, yani Denklem 10.20 ile birlikte

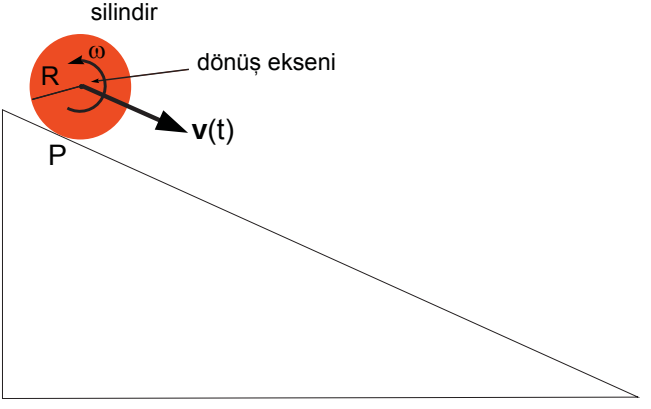


son momentumları ilk momentumlarla ilişkilendiren üç denklem oldu elimizde.

PROBLEMLER

1. Şekildeki üç yol sürtünmesizdir. Aynı yükseklikte duran, birbirine eş üç kutunun her biri bir yola bırakılıyor. Yere vardıklarında bunların süratleri ne kadar olur?

2. 1. problemdeki ilk iki yolda sürtünme olduğunu, sürtünme katsayılarının da aynı olduğunu farz edin, üç kutunun yere vardıkları zamanki süratlerini karşılaştırın. İlk yol ikinci yoldan daha uzundur.

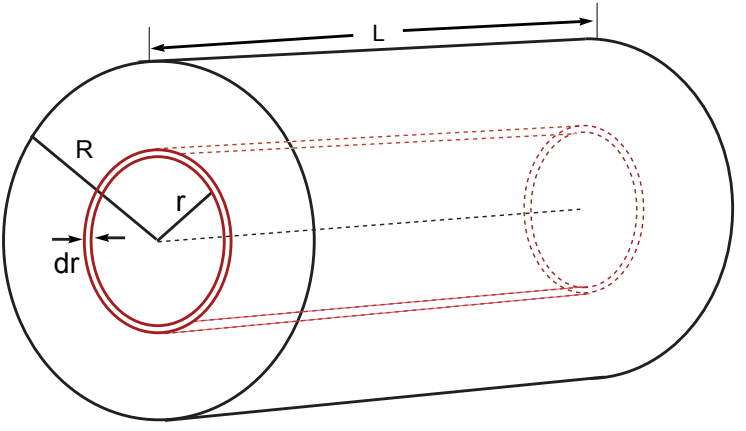


3. Tepede durma halinden başlayıp, h yüksekliğine, θ eğim açısına ve μ kinetik sürtünme katsayısına sahip bir eğik düzlemden aşağı inen M kütleli bir cisim üzerinde sürtünme tarafından yapılan iş nedir? Kutu eğik düzlemin sonuna vardığında kinetik enerjisi ne kadar olur?

4. **Yuvarlanan Bir Cismin Kinetik Enerjisi:** Bir silindir eğik düzlemde hiç yuvarlanmadan aşağıya kayabilir. Bu durumda kinetik enerjisi sadece şudur:

$$\mathrm{KE} = \frac{1}{2}mv^2$$

Eğer silindir hiç kaymayıp, eğik düzlemden aşağı yalnızca yuvarlanıyorsa, o zaman eğik düzlemle temas ettiği P noktası, eğik düzleme göre her bir anda anlık olarak durma halindedir. Silindirin dönme ekseni, $v(t)$ hızıyla eğik düzlem yüzeyine paralel hareket eder. Kayma olmadığı zaman P noktasının hızı $v(t) = \omega(t)R$'dir, ω da silindirin açısal hızıdır.



Eğer dönmeye ek olarak kayma da varsa, o zaman temas noktası P, kayma hızı $V(t)$ ile hareket eder. O halde $v(t) = \omega(t)R + V(t)$ ve $\omega(t) = [v(t)\ V(t)]/R$ olur.

Dönen bir cisim için, $mv^2/2$'ye ek olarak, cismin, eksene göre dönme hareketinde bulunan farklı parçalarının dönme kinetik enerjisi de vardır. Şimdi bu enerjiyi hesap edelim.

Şekilde görüldüğü gibi R yarıçapında, L uzunluğunda ve M kütlesinde katı bir silindir düşünelim. dr kalınlığında ve r yarıçapında bir silindirik kabuğu ele alacak olursak,

(a) Eğer silindir, merkezinden geçen eksen etrafında ω açısal hızıyla dönüyorsa, r yarıçaplı bu silindirik kabuk üzerindeki bir noktanın hızı ne kadar olur?

(b) Silindir ρ tekdüze yoğunluğuna sahipse, r yarıçapında ve dr kalınlığındaki kabuğun kütlesi dm ne kadardır? Not: dm, ince silindirik kabuğun yoğunluğu kere hacmine eşittir.

(c) Eksenden r mesafedeki dm kütleli bu silindirik kabuğun taşıdığı toplam dönme kinetik enerjisi ne kadardır?

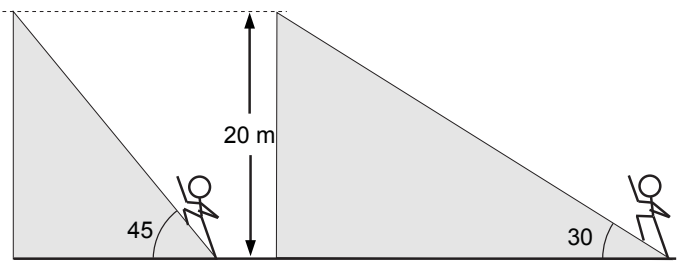
(d) Silindirin tamamının dönme kinetik enerjisi ne kadardır? Not: Önceki adımlardan, ince silindirik kabuğun dönme kinetik enerjisini çıkartıyoruz. Şimdi yarıçapları $r = 0$'dan $r = R$'ye giden bunun gibi bütün ince silindirik kabukların kinetik enerjilerini toplamamız, integralini almamız lazım.

(e) Toplam dönme kinetik enerjisi ω^2 ile orantılıdır. Bunu şöyle yazabiliriz:

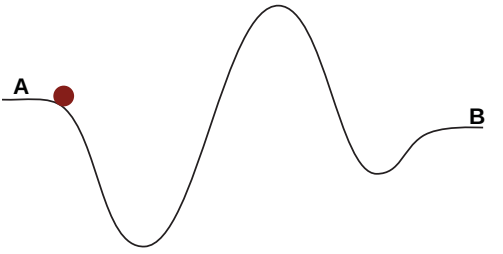
$$\mathrm{KE}_{rot} = \frac{1}{2}\, I\omega^2$$

Burada I, cismin (o dönme ekseni etrafındaki) "eylemsizlik momenti"dir. Eylemsizlik momentinin boyutları nedir? Şekilde görülen silindirin eylemsizlik momenti nedir?

(f) Yoğunluğu tekdüze olan eğri büğrü bir cisim bir eksen etrafında dönüyor olsun. Bu cismi, kalınlığı dr, eksenden mesafesi r, eksene paralel yüksekliği $h(r)$ olan, aynı eksenli ince silindirik hücrelere bölün. Dönme kinetik enerjisini nasıl hesaplarsınız? Eylemsizlik momentini bundan bağımsız olarak nasıl hesaplarsınız?



5. 1 kg kütlesinde bir kutu (1. kutu), $\mathbf{v}_{1,i}$ = 20 m/s **i** ilk hızıyla sürtünmesiz bir yüzeyde hareket ederken, aynı kütleye sahip, başlangıçta durmakta olan başka bir kutuya (2. kutu) çarpıyor. Çarpışmadan sonra 1. kutu, $\mathbf{v}_{1,s}$ son hızıyla ve ilk yönüne 45 derece açıyla hareket ediyor, öyle ki, $\mathbf{v}_{1,s} = v_{1,s}\ \sqrt{2}/2\ (\mathbf{i} + \mathbf{j})$. Çarpışma *esnek* yani toplam kinetik enerji korunuyor. Kutuların son hızları (son süratleri ve 2. kutunun hareket yönü) nedir?



6. (a) Şekildeki yolların her birinden yukarı koşarken Dünya'nın kütleçekimi kuvveti tarafından sizin üstünüzde yapılan işi hesap edin. Kendi kütlenizi kullanın ve hesabınızda $g \cong 10$ m/s^2 kabul edin.

   (b) Bu durumların her birinde siz Dünya üzerinde ne kadar iş yaptınız?

   (c) Durumların her birinde, tepenin zirvesindeki son potansiyel enerjiniz ile tepenin aşağısındaki ilk potansiyel enerjiniz arasındaki fark ne kadar?

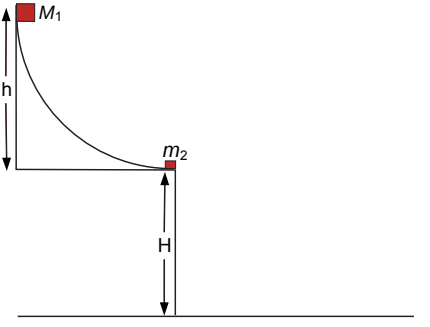
7. Bir top şekilde görülen yolu izliyor.

   (a) Bu yol üzerindeki denge noktaları nerelerdedir?

   (b) Bunlar arasında kararlı denge noktaları var mı? Hangisi ya da hangileri?

   (c) Eğer top başlangıçta A noktasından serbest bırakılıyorsa ve yol üzerinde kaymadan ilerliyorsa, topun bırakıldıktan sonraki hareketini nasıl tanımlarsınız? (Problem 10.4'e bakın.)

   (d) Top maksimum kinetik enerjiye ne zaman sahip olur?



   (e) Eğer yol üzerinde bir miktar kayma varsa top A noktasından bırakıldıktan sonraki hareketini nasıl tanımlarsınız?

EK

Kartezyen koordinatlarda kütleçekimi ivmesinin hesaplanması: (*x, y, z*) kartezyen koordinatlarında kütleçekimi potansiyel enerjisini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$U(r) = \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Kütleçekimi kuvveti, potansiyelin gradyanıdır:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$$

Bu formüldeki *U* türevlerini alınca şu çıkıyor:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \qquad (10.21)$$

r vektörünün yönündeki birim vektör $\mathbf{e}_r$; **r**'nin kendi büyüklüğü olan *r*'ye bölünmüş hali:

$$\mathbf{e_r} = \frac{(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (10.21)$$

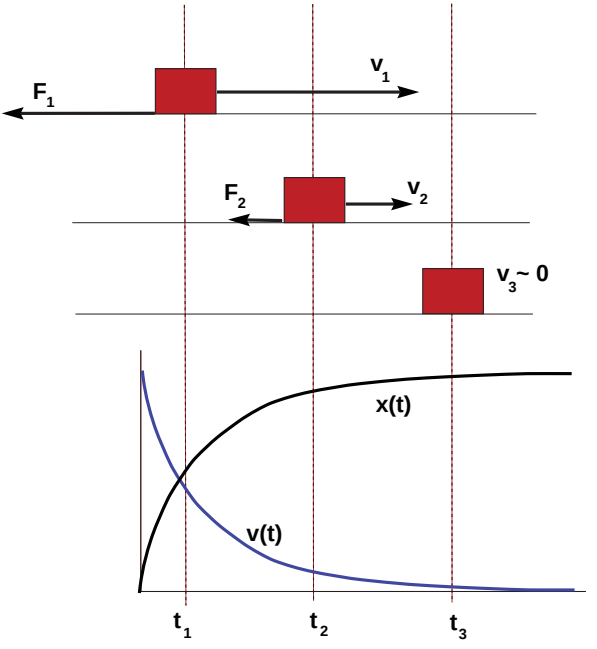
(10.21) ve (10.22) denklemlerini karşılaştırarak kütleçekimi kuvvetinin denklemini buluyoruz:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{e_r}.$$

8. Eğimli bir yol şekilde görüldüğü gibi H yüksekliğinde bir masanın üstüne konmuş. Sürtünmesiz olan bu yolun tepesinden bir M_1 kütlesi serbest bırakılıyor. $m2 = M_1/2$ diye bir başka kütle de başlangıçta masanın üstünde, bu yolun sonunda durma halinde. M_1 yolun sonuna vardığında bu kütleler esnek çarpışıyorlar, ardından ikisi de yere düşüyor.
   (a) M_1 yolun sonuna vardığında hızı ne kadar olur?
   (b) Çarpışmadan sonra M_1 ve m_2'nin hızları ne kadar olur?
   (c) Yere düşmeden önce her kütlenin masanın ucundan katettiği mesafe ne kadar olur?

11
Frenleme ve Üstel Fonksiyon

11.1 HIZLA ORANTILI FRENLEME KUVVETLERİ



Şekil 11.1

Şekil 11.1'de kutu sağa doğru gidiyor ve

$$\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v} \tag{11.1}$$

şeklinde bir frenleme (sürtünme) kuvveti var; α pozitif bir sabit. Frenleme kuvveti hızın yönünün tersinde ve hızın büyüklüğü ile orantılı. Bu, frenlemenin olduğu

pekçok durumu matematiksel olarak iyi açıklıyor.

Şimdi bu hareketin nasıl olduğunu çalışalım; *m* kütleli bir parcacık için Denklem 11.1'deki frenleme kuvvetini ve Newton'un İkinci Kanununu kullanalım:

$$\begin{aligned} m\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{\alpha}{m}\mathbf{v} \end{aligned} \tag{11.2}$$

Zamanın herhangi bir ânında hız vektörünün değişme oranı, o andaki hız kere bir sabitten ibaret! Hızdaki değişme hızın kendisiyle aynı doğrultuda olduğu için hareket tek boyutlu, başlangıç hızının yönünde devam ediyor. Yukarıdaki ifadeyi yeni bir sabitle, τ (tau) ile tekrar yazalım:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{v}}{\tau} \tag{11.3}$$

$\tau \equiv m/\alpha$ sabiti, zaman boyutuna sahip. Bir niceliğin türevinin o nicelikle orantılı olduğunu belirten bu gibi denklemler bilimde çok yaygın ve çok önemli. O kadar önemli ki, bir sonraki kısmı Denklem 11.3 gibi denklemlerin çözümüne ayıracagız. Böyle bir değişmenin çözümü, *üstel fonksiyonla* ilgili.

11.2 ÜSTEL FONKSİYON

Hızla orantılı frenleme örneğine matematiksel olarak benzeyen bir örnek, biyolojideki kontrolsüz nüfus artışı problemi. Hiç ölümün olmadığı gerçek dışı bir durumda, yaşayan organizma nüfusunda yeni doğumların oranı, var olan nüfus kere bir sabittir. Sabitin anlamı basitçe, nüfusun bir *dt* zaman aralığı içinde doğuran kesimidir. *N* bireyden oluşan bir insan nüfusu düşünün. Belli bir yılda doğan bebek sayısı, o nüfusta bulunan doğum yapabilecek yaştaki kadınların sayısıyla orantılı, bu sayı da toplam nüfus olan *N* ile orantılıdır. Yılda doğan bebek sayısı birimiyle, nüfus artış oranı *dN/dt*, nüfus *N* ile orantılıdır:

$$\frac{dN}{dt} = C\ N \tag{11.4}$$

Bu denklemin biçimi, hızda doğrusal bir frenleme kuvveti ile frenlenen parçacığın hareket denkleminin, Denklem 11.3'ün biçimiyle aynı. Aradaki tek fark sabitin önündeki işaret (+ / –).

Bir başka önemli örnek de bozunma reaksiyonları. $A \rightarrow B + C$ gibi bir kimyasal reaksiyonda ya da nükleer bozunmada saniyede çözünen A atomlarının veya bozunan çekirdeklerin sayısı, çözünecek veya bozunacak atom sayısıyla orantılı:

$$\frac{dN_A}{dt} = -K\ N_A \tag{11.5}$$

Bu örnekte orantı sabiti negatif, çünkü *A* türünden atomların sayısı olan *NA* azalıyor. Bütün bu tip denklemlerin çözümünü anlamak için önce en basit örneği ele alalım,

$$\frac{dN}{dt} = N \tag{11.6}$$

Bunu anladığımız zaman, *C*'nin negatif veya pozitif bir sabit olduğu $dN/dt = CN$ genel durumunu kolaylıkla anlayabiliriz. $t = 0$'da elimizdeki şey her neyse ondan $N(0)$ tane var. Biliyoruz ki bunun sayısı $dN = Ndt$ denklemine göre değişiyor. Her saniye geçince, ya da hangi zaman birimini kullanıyorsak o birimden her bir tanesi daha geçince, elimizde *N* tane daha şey olacak! O halde *dt* saniye sonra, ki bu *dt* çok kısa bir zaman dilimi, birim zamandan çok daha kısa, $dN = Ndt$ diye bir artış oldu bile.

Başlangıçtan sonraki herhangi bir *t* zamanında $N(t)$'yi bulmak istiyoruz. Bunu adım adım yapalım. Diyelim ki bu işi *n* adımda yapacağız, o halde zaman *t*'yi, *n* tane zaman adımına bölüyoruz, $t = n\ dt$. İlk küçük zaman aralığından sonra elimizdeki sayı, başladığımız sayı olan $N(0)$ artı aradaki artış, ki bu artışın kendisi de $N(0)$ ile orantılı:

$$N(dt) = N(0) + dN = N(0) + N(0)dt = N(0)[1 + dt] \tag{11.7}$$

Şimdi ikinci *dt* zaman adımından sonra elimizde ne var bakalım. $N(2\ dt)$'yi bulmak istiyoruz:

$$\begin{aligned} N(2\ dt) = N(dt) + dN &= N(dt) + N(dt)\ dt \\ &= N(dt)[1 + dt] = N(0)[1 + dt]^2 \end{aligned} \tag{11.8}$$

Ve sonraki adımdan sonra,

$$N(3\ dt) = N(2\ dt)[1 + dt] = N(0)[1 + dt]^3 \tag{11.9}$$

$t = n\ dt$ zamanına *n* adımda varıyoruz ve görüyoruz ki,

$$N(t) = N(n\ dt) = N(0)[1 + dt]^n = N(0)[1 + t/n]^n \tag{11.10}$$

Böylece $N(0)$'dan başlayarak $N(t)$'yi nasıl hesaplayacağımızı biliyoruz. Bu yaklaşık hesabı kendiniz yapın: Bu bölümün sonundaki 1. Probleme bakın.

Bu işin biricik şekli bu, başka yolu yok. $N(0)$'dan başlıyorsunuz, Denklem 11.6 ve 11.7'yi uyguluyorsunuz, her adımdaki artış oranı *N*'nin o anki değeriyle orantılı oluyor ve $N(t)$'ye varıyorsunuz. Fakat bu tasvirdeki $N(t)$ eğrisi köşeli bir

eğri. Bunun nedeni de hesabı *n* adımda yapmış olmamız. Yaklaşık bir hesap bu! Bir şeyi sayısal olarak, hesap makinesiyle veya bilgisayarda hesaplamanın tek yolu onu yaklaşık olarak, belli bir hassasiyet derecesiyle hesaplamak. Belli bir *t*'ye ulaşmak için kaç tane *n* adımından geçmek istiyorsunuz? Mesela elinizdeki kaptaki bakteri popülasyonunun 1 gün içinde kontrolsüz nüfus artışıyla (ölüm yok!) ne kadar arttığını bulmak istiyorsanız 1 saatlik adımlarla hesap yapabilirsiniz. Bu 24 adım eder. İsterseniz saniyelik adımlarla hesaplarsınız. Bu da 86.400 adım eder. Saniyelerle hesap yaptığınızda eğriniz daha düzgün, daha az köşeli olur, daha hassas bir sonuç elde edersiniz. Demek ki ne kadar çok adımınız olursa, zamanınız *t*'yi *n* tane adıma bölerken *n* artıp *dt* kısaldıkça, daha düzgün, daha temiz bir eğriniz olur:

$$N(t) = N(0) \lim_{n\to\infty} [1 + (t/n)]^n \tag{11.11}$$

Bu eğrinin benzersiz bir eğri olduğunu unutmayın. $N(0)$'dan $N(t)$'ye gitmenin sadece bir yolu var. Başka bir $N(0)$'dan başlayacak olsak, diyelim $N_{yeni}(0) = 2{,}53\ N(0)$ olsun, tek yapacağımız bütün bu eğriyi 2,53'le çarpmak. $N(0)$ ölçeği belirliyor. Eğrinin şekli $N(0)$'a bağlı değil! Tıpkı, boyutlar değişse bile tek bir daire şekli, tek bir parabol şekli, tek bir eşkenar üçgen şekli olduğu gibi, bir şeyin büyüme oranının her noktada kendi değeriyle orantılı olduğu durumu tanımlayan eğrinin de bir tek şekli var. Bu şekli veren fonksiyon,

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} [1 + (t/n)]^n \tag{11.12}$$

Bu da "$dN/dt = N(t)$" kuralına uyan $N(t)$ eğrisinin şekli.

Bu önemli bir fonksiyon! Bunun hakkında bir şeyler daha öğrenelim.

Önce, $N(t)$ hesabınızı iki kısımda yaptığınızı farz edin. $t = t_1 + t_2$ olsun. Şunu hesaplıyorsunuz,

$$N(t_1) = N(0) \lim_{n\to\infty} [1 + (t_1/n)]^n = N(0)f(t_1)$$

Sonra bu sayıyı bir yere not edip bir ara veriyorsunuz. Bilgisayarınızın duraklatma tuşuna basın. Bakterilerinizi dondurun, bölünüp çoğalmasınlar. Gidin bir çay için. Geri gelip işi tekrar başlatın. Şimdi başlayacağınız şeylerin sayısı $N(t_1)$. İşi t_2 saniye daha devam ettirin, toplam çalışma süresi $t = t_1 + t_2$ olsun. O zaman elimizde şu var: $N(t) = N(t_1 + t_2) = N(t_1)f(t_2) = N(0)f(t_1)f(t_2)$. Fakat her *t* zamanı için olduğu gibi, $N(t) = N(t_1 + t_2) = N(0)f(t_1 + t_2)$. Yani fonksiyonumuzun, eğrimizin şeklinin çok basit bir özelliği var:

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1)f(t_2) \tag{11.13}$$

Bu, fonksiyon $f(t)$ = "*(bir sayı) üzeri t" anlamına geliyor*. Fakat oluşturduğumuz eğri ve elimizdeki *f* fonksiyonu benzersiz, böyle sadece bir tane $f(t)$ fonksiyonu

var. *Demek ki o "bir sayı", başka eşdeğeri olmayan, belli, tek bir sayı*. Bu matematikte o kadar önemli bir sayı ki, tıpkı π sayısı gibi buna da özel bir isim verilmiş. *Sayımızın adı e sayısı*. $f(t)$ fonksiyonuna "*üstel fonksiyon*" deniyor, $\exp(t)$ diye gösteriliyor, denklemi de

$$f(t) \equiv \exp(t) = e^t \tag{11.14}$$

yani sadece "*e üzeri t*".

e sayısının kendisi de üstel fonksiyonun tanımından hesaplanabilir, zira

$$e = e^1 = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} [1 + (1/n)]^n \tag{11.15}$$

> ***e*'yi hesaplayın:** *n* = 2, 3, 4, 5'le deneyin, sonra *n* = 10, 100, 200...'ü deneyin. Seçtiğiniz *n*'lere karşılık o *n*'nin *e* tutarını koyarak bir tablo yapın. *n* büyüdükçe sonuçlar *e*'nin değerine epey çabuk yaklaşacaklar (matematik terimiyle, "yakınsayacaklar.")

O halde $dN/dt = N$ denkleminin sonucunu biliyoruz:

$$N(t) = N(0)\ \exp(t) = N(0)\ e^t \tag{11.16}$$

Buradan, C orantı sabiti ile $dN/dt = CN$ denkleminin çözümünü bulmak basit. Bunun için şöyle yazıyoruz:

$$\begin{aligned} dN/dt &= CN \\ dN/(Cdt) &= N \\ Ct &\equiv t' \\ Cdt &\equiv dt' \\ dN/dt' &= N \end{aligned} \tag{11.17}$$

Yeni zaman ölçeğini (t') tanımlayarak Denklem 11.6'yı elde etmiş olduk. Bunun çözümünü de biliyoruz:

$$N(t') = N(0)\exp(t') = N(0)\exp(C\ t) \tag{11.18}$$

Böylece Denklem 11.3'teki frenlemenin, Denklem 11.4'teki nüfus artışının ve Denklem 11.5'teki kimyasal veya nükleer bozunmanın çözümünü nasıl bulacagımızı artık biliyoruz. Ayrıntılı çözümleri ve uygulamaları problemlere bırakıyoruz. Frenleme örneğine dönecek olursak, çözüm

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0)\exp(-t/\tau) \tag{11.19}$$

Frenleme kuvvetinden dolayı hız azalıyor. Hız ne kadar düşerse, azalma oranı da o kadar daha düşük olacak. Hız, *asimptotik olarak* sıfıra doğru *azalacak*. Kutunun konumu, kısa dt süreleri içinde kat ettiği, t'den $t + dt$'ye kadar olan bütün küçük $dx(t) = v(t)\, dt$ uzaklıklarının toplamı (integrali!) olur. O zaman, $x(0) = 0$'dan başlayıp integral alarak konumu buluyoruz:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(t')dt' = \mathbf{v}(0)\ \tau\ (1 - \exp(-t/\tau)) \tag{11.20}$$

Soru

Mesafe neden gitgide daha yavaş artıyor?

Galileo ve Newton'a kadar, bir nesneyi sadece hareket ettirmek için bile, nesne sabit hızla da gitse bir kuvvetin gerekli olduğu düşünülüyordu. Bu kanıya göre, hiçbir kuvvet olmasaydı bir cismin doğal durumu durmak ($\mathbf{v} = 0$) olurdu!

Soru

İnsanların böyle düşünmesine ne yol açtı?

PROBLEMLER

1. Başlangıçtaki sayısı $N(0) = 10$ olan bir fare popülasyonu $dN/dt = N(t)$ kuralına göre artıyor, burada t'nin ölçüm birimi ay. Denklem 11.10'i kullanarak, aşağıda belirtilen n ara süreleri ile popülasyonu 4 aya kadar bulun ve grafik üzerinde gösterin.

   (a) $n = 4$ zaman aralığı.

   (b) $n = 8$ zaman aralığı.

   (c) $n = 16$ zaman aralığı.

2. Bir hesap makinesi kullanarak bulacağınız örnek değerlerle, t'ye karşı $f(t) = \exp(t)$, $\exp(3.2t)$, $\exp(-t)$ ve $\exp(-t/5)$ eğrilerini grafik üzerinde gösterin.

3. İkinci problemdeki eğrileri, $f(t) = \exp(t)$ eğrisinden, t'nin birimlerini değiştirerek ve/veya t ekseninizin yönünü değiştirerek elde edebilir misiniz?

4. 10 kg kütlesinde bir nesne, $\mathbf{F}_f = 5\mathbf{v}$ kuvvetindeki frenleme kuvvetine karşı hareket ediyor. Başlangıç hızı $\mathbf{v}(0) = 20\,\mathbf{i}$ m/s.

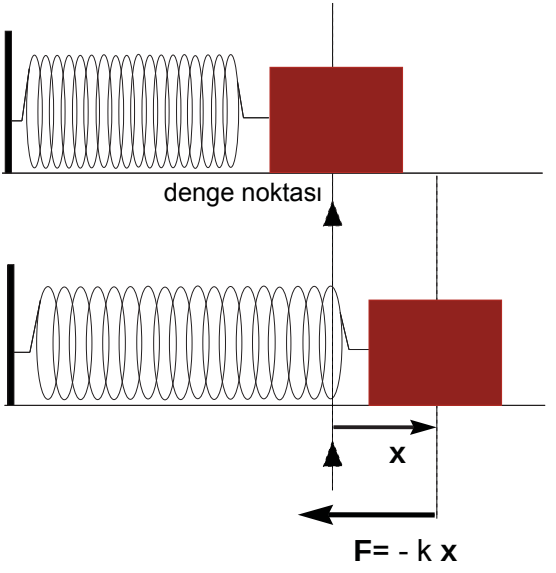
   (a) $\mathbf{v}(t)$'nin ifadesini bulun.

   (b) $t = 2$ s, 6 s, 10 s'de hız kaç?

   (c) $t = 2$ s, 6 s, 10 s'de ivme kaç?

   (d) Nesne başlangıçta $\mathbf{x}(0) = 10\,\mathbf{i}$ *m*'deydi. $\mathbf{x}(t)$'yi bulun.

12
Harmonik Osilatör



Şekil 12.1

Kütle, Şekil 12.1'de görüldüğü gibi denge konumundan x kadar yer değiştirdiğinde, *mükemmel harmonik* bir yay ona şu kuvveti uygular:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$$

Bu kuvvet formülüne Hooke Kanunu denir. Bu genel bir doğa kanunu değil, yayların ve başka pek çok sistemin *kararlı dengeye yakın oldukları zaman* gösterdikleri bir özelliktir.

Potansiyel enerji eğrilerini işlerken gördüğümüz gibi, denge konumu, kütlenin başlangıçta durur konumda bırakılırsa kalacağı yerdir. Hooke Kanununda

kuvvet, yer değişiminin ters yönündedir: Bu bir *geri getirme kuvvetidir*. Kütle dengeden uzaklaştırıldığı zaman denge noktasına doğru yeniden hızlanır. Yayın denge noktası kararlı bir denge noktasıdır. Yayın geri getirme kuvvetinin çok basit bir şekli vardır: Büyüklüğü yalnızca x'le orantılıdır. Bu tür bir $\mathbf{F} = k\mathbf{x}$ kuvveti, potansiyel enerjiyle ilişkilidir:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

Yay konusunu ayrıntılı olarak işliyoruz çünkü doğada ve teknolojide sık karşılaşılan önemli bir durumu temsil ediyor. *Doğrusal* geri getirme kuvvetleri, *kararlı dengeye yakın* bütün sistemlerin dinamikleri için geçerlidir. Denge noktasına yakın hareketlerde sistemler, doğrusal geri getirme kuvvetlerinin etkisi altında denge noktasından geçerek, bu nokta civarında gelip giderek hareket ederler. Kararlı (en az) bir tane denge noktası bulunan herhangi bir potansiyel $U(x)$ düşünün. $U(x)$'in genel olarak, tepeler ve vadilerden oluşan belli bir şekli olur. Bir kararlı denge noktasının konumuna $x = 0$ diyelim. Burası bir vadinin dibi. Bu $x = 0$ kararlı denge noktasının civarında yeterince yakın yerlerde, yani x konum değeri yeterince küçük olan noktalarda, her potansiyel yaklaşık olarak $U(x) \cong kx^2/2$ gibidir. Bunu görmek için önce bir minimuma yakın olan bir potansiyele bakın. x^2 gibi bir eğrinin (ki buna *parabol* denir), $k/2$ sabiti ayarlanarak bir vadinin tabanına oturtulabilecek bir şekle sahip olduğunu siz de zihninizde canlandırabilirsiniz. Dipten kısa bir x mesafesinde, potansiyel enerji U, tam dipteki $x = 0$ noktasının U değerine hemen hemen eşittir, yalnızca x'in kuvvetleriyle (üsleriyle) orantılı bazı düzeltmeler ister:

$$U(x) = U(0) + Ax + Bx^2 + Cx^3 + ... \tag{12.1}$$

Bütün fonksiyonların, kendi $x = 0$ değerleri etrafında Denklem (12.1)'deki gibi bir açılımla ifade edilebileceğini matematik ve kalkülüs derslerinizde göreceksiniz. $x = 0$'daki potansiyel enerji değerini 0 olarak seçebiliriz: $U(0) = 0$. Bu durumda kuvvet şöyle ifade edilir:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -A - 2Bx - 3Cx^2 + ... \tag{12.2}$$

Şimdi, $F(x = 0) = 0$; kuvvet, potansiyel enerjinin türevi, tam denge noktasında sıfırdır. Demek ki, sabit $A = 0$'dır. Böylece, denge noktasının yakınlarında potansiyel enerji yaklaşık olarak şu şekildedir:

$$U(x) = Bx^2 + Cx^3 + ...$$

O zaman, diyelim $x = 0,\ 1$ olursa,

$$U(0,1) \cong 0,01B + 0,001C$$

C, B'ye kıyasla çok büyük olmadığı sürece, son terim küçüktür ve göz ardı edilebilir. Eğer C, 10 B'den büyükse $x = 0,1$ için üçüncü terim göz ardı edilemez. Fakat C ne kadar büyük olursa olsun, *yeterince* küçük x'lerde, baskın terim Bx^2 olacaktır. Demek ki, denge noktasına yeterince yakın yerlerde

$$U(x) \cong Bx^2$$

Bu tanımla, kuvvet:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -2Bx \equiv -kx \tag{12.3}$$

Kuvvetin x'e doğru orantılı ve ters yönde bir geri getirme kuvveti olduğunu görüyoruz. Bu formüle Hooke Kanunu denir. Sabitlerin adının bir önemi yok. $2B = k$'yı tanırız, kuvvetin Hooke Kanunundaki alışılagelmiş gösterimidir bu. U, bir kararlı denge noktası olan herhangi bir potansiyel enerji fonksiyonu olabilir o zaman! Öyleyse, bir *potansiyel kuyusunun* dibine, kararlı denge noktasına yeterince yakın bir yerde her potansiyel yaklaşık olarak $(1/2)kx^2$'dir; her potansiyel, $F(x) = -kx$ doğrusal geri getirme kuvvetini verir.

Potansiyel enerji birçok koordinatın, birçok parçacığın bir fonksiyonu olabilir. Potansiyel enerjiyi etkileyen, bizim ilgilendiğimiz değişken, x gibi bir mesafe bile değildir belki, mesela su molekülünü oluşturan iki OH bağı gibi iki kimyasal bağ arasındaki açı da olabilir bu. Ama ilke aynıdır. Dengede su molekülünün karakteristik bir şekli vardır, iki OH bağı 104,5 derecelik bir açı yaparlar. Molekül bu denge şekli etrafında salınır. Açının 104,5 dereceden ufak tefek sapmalar göstermesi halinde, dengeye dönme yönünde bir geri getirme kuvveti olur. Bu kuvvetin büyüklüğü, açının 104,5 dereceden yaptığı küçük sapma ile orantılıdır.

Tamam, $F = -kx$ sadece yay için geçerli değil, genel ve önemli bir eşitlik bu. *Peki ama böyle bir kuvvet nasıl bir hareket yaratıyor?*

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Bu durumda $x(t)$'nin çözümü, zamana göre ikinci türevi negatif bir sabit $(-k/m)$ kere aynı $x(t)$ fonksiyonu olan bir şey olmalı! Bu özellikte iki fonksiyonu biz zaten biliyoruz (düzgün dairesel hareketi işlerken görmüştük), $\cos(\omega t)$ ile $\sin(\omega t)$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(\omega t) = -\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\sin(\omega t) = -\omega^2 \sin(\omega t)$$

O halde, açısal frekansı ω olup, $\omega^2 = (k/m)$'yi sağlayan bir kosinüs ya da sinüs osilasyonu (salınımı), yayın/harmonik osilatörün olası bir hareketidir.

Doğrusal sistemlerin, *süperpozisyon ilkesi* denen basit ve önemli bir özelliği vardır. Eğer $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ diye iki çözüm biliyorsanız, bunların *doğrusal birleşimini* alsak, yani biraz ondan biraz ötekinden alıp toplasak, bir çözümü herhangi bir A katsayısı ile çarpıp ötekini de B ile çarpıp biraraya getirsek, şöyle: $Ax_1(t) + Bx_2(t)$; işte bu da bir çözümdür. Bu *süperpozisyon ilkesi* yalnızca denklem *doğrusal* ise (denklemde x'in ve x'in herhangi bir türevinin yalnız birer tane kuvveti varsa) işler.

Mekaniğin genel kuralı olan Newton'un İkinci Kanunu $F = ma$, ma tarafında *doğrusaldır*: $a = d^2x/dt^2$'ye düz oran var ama mesela a^3 gibi bir terim yok. Denklemin sol tarafı (F) genellikle doğrusal değildir; fakat elimizdeki çok özel ve önemli durumda, $F = -kx$ için doğrusaldır. Eğer kuvvet, diyelim ki $F = -kx^5$ olursa, o zaman süperpozisyon ilkesi işlemez.

Şimdi, osilatör icin çözümümüz,

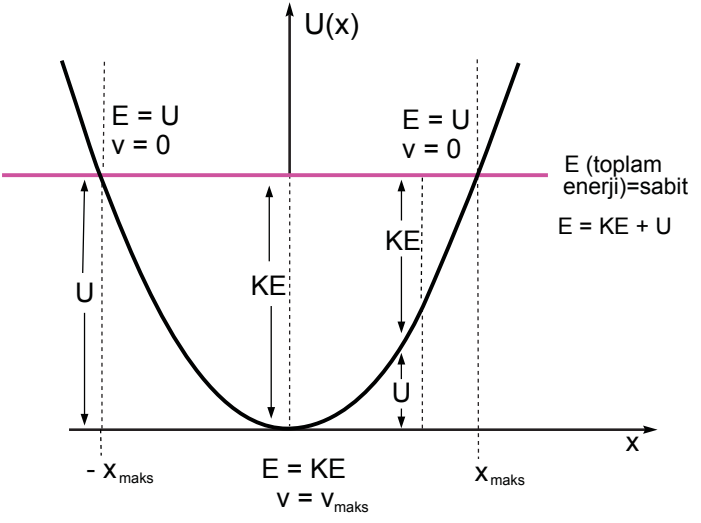
$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Acaba hikâye bundan mı ibaret? Yoksa sinüs ve kosinüs dışında, hem çözüm olan hem de süperpozisyon ilkesinden dolayı toplayabildiğimiz başka fonksiyonlar da var mı?

Sinüs ile kosinüsten başka çözüm yok. $F = ma$, x'in *ikinci* türevi olan ivmeyi herhangi bir an için belirlememizi sağlar. $x(0)$ ile $v(0)$'ın ne olduğunu bildiğiniz sürece, $t = 0$ başlangıç zamanından itibaren bir hareketin tamamını bulabilirsiniz. Bu iki sabit (*başlangıç koşulları*) üzerinden, başlangıç ivmesini belirleyebilirsiniz. Bu sizin hızı ve dt zaman aralığından sonraki konumu bulmanıza imkân verir, burada kuvvet formülünden bir sonraki ivmeyi bulursunuz, ona bakarak bir sonraki hızı ve konumu bulursunuz ve bu böylece sürüp gider. Başlangıçtaki değerleri, $x(0)$ ve $v(0)$'ı bilirsek, bu *iki* sabit (*"başlangıç koşulları"*) hareketin bundan sonrasını kesin ve tek bir biçimde belirler. $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ genel çözümünde A ve B diye iki sabit var, bunlar birbirinden bağımsız iki fonksiyonun, sinüsle kosinüsün çarpanları. Başlangıçtaki iki koşul, $x(0)$ ile $v(0)$, size A ile B'nin ne olduğunu verir. Başlangıcın bu iki koşulundan üçüncü bir katkıyı, (olsaydı) farklı bir üçüncü çözüm fonksiyonunun katsayısını çıkaramazsınız. Evet, bütün hikâye bu iki çözümden ibaret. Genel çözüm farklı bicimlerde de yazılabilir ama her zaman A, B veya R, ϕ (fi) veya R, ϕ' gibi iki sabit vardır:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + Bsin(\omega t) = R\cos(\omega t + \phi) = R'\sin(\omega t + \phi')$$

(Bunun nasıl işlediğini görmek için 8. Problem'i çözün.) Şimdi de basit harmonik hareket sırasındaki mekanik enerjiye bakalım. Şekil 12.1'deki gibi, yaya bağlı bir kutu olsun. Kutunun potansiyel enerjisi Şekil 12.2'de görülüyor. Yay *xmaks*'a çekilince, yay üzerinde *kx*2 /2 potansiyel enerjisi toplanıyor. Kutunun toplam enerjisi bu potansiyel enerjiye eşit. Şekil 12.2'de toplam enerji yatay çizgi ile gösteriliyor. Kutu serbest bırakıldığı zaman denge noktasına doğru ivme kazanıyor ve potansiyel enerji kinetik enerjiye dönüşüyor. Eğer sistemde herhangi bir frenleme (sürtünme) mekanizması yoksa, toplam mekanik enerji, potansiyel enerji + kinetik enerji, hareket boyunca sabit kalıyor. $x = 0$'da, kutu denge noktasından geçerken, $U = 0$, kutunun kinetik enerjisi ise maksimumdur (11. Problem'e bakın).



Şekil 12.1

PROBLEMLER

1. *Harmonik Olmayan Yay:* Bir yayın ucundaki kutunun potansiyel enerjisi yaklaşık olarak şöyle veriliyor:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + Cx^3$$

burada $U(x)$'in birimi Joule'dür, x ise kütlenin, denge merkezinden mesafesidir ve birimi metredir. Sabitler $k = 200$ N/m ve $C = 1000$ N/m^2.

(a) İki terim x'in hangi değerleri için eşittir?

(b) Bu yay $x < 0{,}01$ m'de Hooke Kanununa uyar mı?

(c) $x = 0$ denge noktasının her iki yanında (hem pozitif hem negatif x için) potansiyel enerjiyi ve kuvveti grafik çizerek gösterin.

(d) $x = 0{,}2$ m'de kuvvet nedir ve hangi yöndedir? Peki ya $x = -0{,}2$ m'de?

2. *Harmonik Olmayan Bir Yay Daha:* Bir yayın ucundaki kutunun potansiyel enerjisi yaklaşık olarak şöyle veriliyor:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + Dx^4$$

Burada $U(x)$'in birimi Joule'dür, x kütlenin, denge merkezinden mesafesidir, birimi metredir. Sabitler $k = 200$ N/m ve $D = 10.000$ N/m^3.

(a) Hangi x değeri için iki terim eşit olur?

(b) Bu yay $x = 0{,}01$ m'de Hooke Kanununa uyar mı?

(c) $x = 0$ denge noktasının her iki yanında (hem pozitif hem negatif x için) potansiyel enerjiyi ve kuvveti grafik çizerek gösterin.

(d) $x = 0{,}2$ m'de kuvvet nedir ve hangi yöndedir? Peki ya $x = -0{,}2$ m'de?

3. Bir harmonik osilatörün konumu $x(t) = 5\ cos(\pi t + \pi/5)$'tir.

(a) Süratin maksimum olduğu yerde (v_{maks}), x'in konumunu bulun.

(b) İvme büyüklüğünün maksimum olduğu yerdeki (a_{maks}) x konumlarını bulun.

4. $x(t)$'yi hareket denklemine koyarak,

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

olmak koşuluyla,

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

eşitliğinin, hareket denkleminin

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

bir çözümü olduğunu gösterin.

5. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$'nin aşağıdaki denklemin çözümleri olduğunu kabul edin.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx^3$$

Bu durumda $Ax_1(t) + Bx_2(t)$ de bir çözüm müdür?

6. m kütlesine ve k yay sabitine sahip bir harmonik yay olsun. Bunun en genel hareketini şu denklem veriyor:

$$x(t) = A\ \cos(\omega t) + B\ \sin(\omega t)$$

Burada $\omega^2 = k/m$.

(a) ωt'ye, osilasyonun "*fazı*" denir. Fazın hangi değerleri için, kosinüs ve sinüs fonksiyonları ve dolayısıyla $x(t)$ konumu, $t = 0$ zamanındaki ile aynı değerdedir?

(b) Osilatörün (salınan kütlenin) $x(t_0 + P) = x(t_0)$ olacak şekilde aynı noktaya döndüğü P zamanına *periyot* denir. Periyot, ω cinsinden nedir?

(c) Eğer osilatör bir osilasyon döngüsünü 0,05 saniyede tamamlıyorsa, 1 saniyede kaç döngü tamamlanır? ω'nın değeri kaçtır?

(d) Osilatör bir osilasyon döngüsünü P saniyede tamamlıyorsa, 1 saniyede kaç döngü tamamlanır? Buna frekans f denir. Birimi *saniyedeki dönüş sayısı* veya *Hertz*, kısaca Hz'dir. Frekans f ile açısal frekans ω arasında nasıl bir ilişki vardır? *Açısal frekansın* diğer adı *radyan frekansıdır*, birimi de rad/s'dir.

7. 5. Problem'deki A, B'yi $x(0)$ ve $v(0)$ cinsinden ifade edin.

8. Genel harmonik osilatör hareketi $x(t)$ şöyle de ifade edilebilir:

$$x(t) = A\ \cos(\omega t) + B\ \sin(\omega t) = R\ \cos(\omega t + \phi) = R'\ \sin(\omega t + \phi')$$

R, ϕ'yi A, B cinsinden ifade edin. A, B'yi R, ϕ cinsinden ifade edin. Aynı şeyi R', ϕ' ve A, B ile tekrar edin.

9. $x(t) = \cos(\omega t)$, $x(t) = \sin(\omega t)$, $x(t) = \cos(\omega t + \phi)$ ve $x(kt) = \sin(\omega t + \phi')$ denklemlerini, 0 ve $\pi/2$ dışında kendi seçeceğiniz rasgele ϕ ve ϕ' değerleri için işaretleyin. Bunların hepsi aynı eğridir, aynı şekildir, sadece zaman t'ye göre yerleri değişiktir. Bu eğriler $x(0)$ ve $v(0)$ için farklı koşulları sağlarlar.

10. Herhangi bir gösterimde $x(t)$'den $v(t) = dx/dt$'yi elde edebilirsiniz. 8. Problemdeki $x(t)$ ifadelerinin her biri için bunu yapın. Şimdi elde ettiğiniz $v(t)$ eğrilerini çizin.

11. Bu problemde, $k = 4$ N/m yay sabitine sahip bir yaya bağlanmış 1 kg kütleli bir osilatörün kinetik enerjisini ve potansiyel enerjisini hesaplayacağız. Hareket,

$$x(t) = 2\ \sin(\omega t + \pi/6)$$

ile veriliyor.

(a) Önce ω'nın değerini bulun.

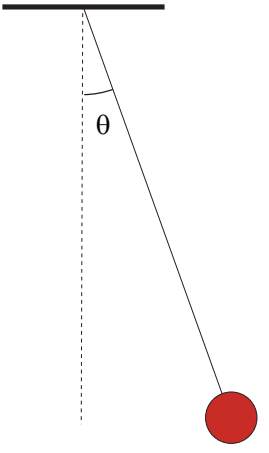
(b) Osilasyon periyodu nedir?

(c) Zaman t'nin bir fonksiyonu olarak kinetik enerjiyi hesaplayıp işaretleyin.

(d) Zaman t'nin bir fonksiyonu olarak potansiyel enerjiyi hesaplayıp, kinetik enerjiyle aynı grafik üzerinde işaretleyin.

(e) Toplam enerjiyi hesaplayıp işaretleyin. Toplam enerjinin sabit kaldığını göreceksiniz!

(f) Potansiyel enerjinin ortalama değeri nedir? Kinetik enerjininki nedir? İki seferde de ortalama değerlerin toplam enerjinin yarısı olduğunu görüyor musunuz?



12. Bir sarkaç,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

ile küçük osilasyonlar yapıyor, burada $\omega^2 = g/L$, ve $\theta_0 = 0,\ 1rad$. Sarkacın uzunluğu L = 10 cm. $g = 10$ m/s^2 kabul edin.

(a) Açısal frekans ω ve periyot P 'yi bulun.

(b) Ne zaman yer değişimi $\theta = 0$ olur?

(c) Yer değişimi θ ne zaman maksimum, pozitif (şekilde sağa doğru) olur?

(d) Yer değişimi θ ne zaman maksimum, negatif (şekilde sola doğru) olur?

(e) $\Omega(t) \equiv d\theta/dt$'nin, sarkacın açısal hızının, ifadesini bulun (açısal frekans ω ile karıştırmayın).

(f) (b), (c) ve (d)'deki zamanların her biri için, (θ'nın sıfır, maksimum negatif ve maksimum pozitif olduğu zamanlar için) $\Omega(t)$ nedir?

13
Açısal Momentum

Kuvvet (**F**) uygulayan bir cismin etkisi altında hareket eden bir başka cismi ele alalım. Konum vektörü **r**, etkileşim içindeki bu iki cismin kütle merkezinden ölçülüyor; başka bir deyişle kütle merkezi, koordinat sisteminin sıfır noktası olarak seçilmiş. Hareket denklemi, yani Newton'un İkinci Kanunu, şöyle:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Önemli bir korunumlu nicelik olan *açısal momentum* ve açısal momentumun korunduğu koşullar Newton'un İkinci Kanunundan çıkarılabilir. Bunu yapmak için, Newton'un İkinci Kanununun iki tarafının da **r** ile çapraz çarpımını alalım:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{13.2}$$

Şimdi, çapraz çarpımlar için de geçerli olan, bir çarpımın türevini alma kuralını hatırlayalım:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \tag{13.3}$$

O halde, Denklem 13.2'nin sağ tarafı şöyle de yazılabilir:

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \tag{13.4}$$

Ama $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ ile $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ birbirine paralel vektörler, bunların çapraz çarpımı ortadan kalkıyor, $(d\mathbf{r}/dt) \times \mathbf{p} = 0$. Böylece şuraya varıyoruz:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{13.5}$$

Genellikle **L** ile gösterilen $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ vektörüne "*açısal momentum*," genellikle **N** ile gösterilen $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$'ye ise "*tork*" denir. Çapraz çarpımın tanımını hatırlayın: L, momentumun **r**'ye *dik* olan bileşenini kapsar, "yana doğru," açısal veya yörüngesel

hareketle ilişkilidir. Benzer şekilde tork da kuvvetin **r**'ye dik olan bileşeniyle ilişkilidir.

Doğanın bazı temel kuvvetlerinde, iki cismin arasındaki kuvvetin yönü, bu cisimleri birleştiren çizgi boyuncadır. Bu hem kütleçekimi kuvveti hem de daha sonra göreceğimiz, elektrostatik (Coulomb) itme veya çekme kuvvetleri için geçerlidir. Bu gibi kuvvetlere "merkezî" kuvvetler denir. Bunun ne özelliği var diyebilirsiniz; merkezî *olmayan* kuvvet mi var ki? Önemli bir örnek, yine ilerleyen bölümlerde göreceğimiz Lorentz kuvveti, yani manyetik alanın, yüklü parçacıklara uyguladığı kuvvet. Hava ve su gibi akışkanların içinde dönen nesnelerle ilgili kuvvetler de merkezsiz olabilir: Bir tenis veya pinpon topu ile raket arasındaki kuvvet de, topa spin verdiğiniz zaman merkezsizdir. Şimdi bu istisnaları bir kenara bırakıp merkezî kuvvetlere dönelim. İki cismin kütle merkezi onları birleştiren çizgi üzerinde olduğuna göre, merkezî kuvvet **F**'nin yönü r'ye, cismimizin (ve cisimlerden her birinin) kütle merkezine göre konumuna paraleldir. Dolayısıyla merkezî kuvvetler için tork **r** × **F** sıfırdır ve elimizde şu vardır:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \tag{13.6}$$

Merkezî kuvvetler için açısal momentum korunur.

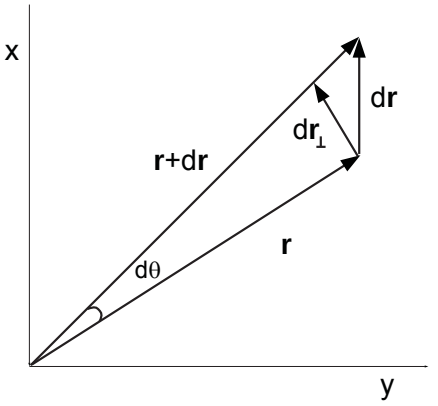
Ne demek bu? Açısal momentum **L** bir vektördür. Bir vektör korunuyorsa, *hem yönü hem büyüklüğü sabit kalır*. **L** = **r** × **p** hem **r**'ye hem de **p**'ye diktir, dolayısıyla **L**'nin yönü, **r**(t) ile **p**(t)'nin oluşturduğu düzleme diktir, çapraz çarpımın tanımında kullanılan sağ el kuralı takip edilerek bulunan yönde, bu düzlemden dışarı çıkar: Sağ elinizin parmaklarını **r**'nin yönünden **p**'nin yönüne doğru kıvırırsanız, baş parmağınızın yönü **L**'nin ne tarafa dönük olduğunu gösterir. Açısal momentumun yönü **L** değişmediği için, bu kural **r**(t) ile **p**(t)'nin bulunduğu düzlemin de zamanla değişmediğini anlatır. Açısal momentum **L** sabit olacak şekilde merkezî kuvvetlerin etkisinde bulunan bir harekette **r**(t) ile **p**(t) her zaman aynı düzlem üzerinde kalmak zorundadır. Bu yüzden, mesela Güneş'le (merkezî bir kuvvet olan) kütleçekimi kuvveti üzerinden etkileşen bir gezegenin yörüngesi hep aynı düzlemde olmak zorundadır. Bir gezegen kendi düzleminin dışına çıkamaz, çünkü açısal momentum korunmaktadır.

L'nin büyüklüğü şöyledir:

$$L = rp_{\perp} = mrv_{\perp} \tag{13.7}$$

$\perp$, **r**'ye dik olan yönü ifade eder. Şekil 13.1'den görüyoruz ki, **r**'ye dik olan $v_{\perp}$ hız bileşeni şudur:

$$v_{\perp} = \frac{(dr_{\perp})}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \tag{13.8}$$



Şekil 13.1

burada *dθ/dt*, *anlık açısal hızdır*. *θ*'nın birimi radyan olduğuna göre, $dr_\perp = rd\theta$'dır. Böylece şunu elde ediyoruz:

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \tag{13.9}$$

Öte yandan, konum vektörünün birim zamanda taradığı alan şöyledir:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{dr_\perp}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \tag{13.10}$$

Şekil 13.1'den de görüldüğü üzere, *dt* süresinde konum vektörü bir *dθ* açısıyla hareket ediyor ve taban uzunluğu *r*, yüksekliği ise $dr_\perp = rd\theta$ kadar olan üçgenin $dA = r^2 d\theta/2$ alanını tarıyor. Bu durumda,

$$L = 2m \frac{dA}{dt} \tag{13.11}$$

L korunsa da korunmasa da bu genel bir geometrik ifadedir. *L* sabit olduğunda, $dA/dt = L/2m$ de bir sabit demektir: *Hareket eden cismin, yörüngesinde birim zaman aralığında taradığı alan, zaman içinde sabittir.* Kütleçekimi ve Kepler'le ilgili bölümde inceleyeceğimiz Kepler'in İkinci Kanununa göre, *Eşit alanlar eşit zamanda taranır*. (14. Bölüm'e bakın.) Kepler'in İkinci Kanunu, açısal momentumun gezegenlerin hareketinde korunduğunun gözlenmesinden ibarettir. Bu böyle olmalıdır, çünkü kütleçekimi kuvveti merkezî bir kuvvettir. Kepler bu kanunları ampirik yoldan, Tycho Brahe'nin gezegenlerin hareketleri üstüne astronomi gözlemlerini analiz ederek bulmuştu. Kepler'in İkinci Kanunu, Newton'un İkinci Kanununun ve kütleçekimi kuvvetinin merkezî doğasının bir sonucudur; açısal momentumun korunmasının bir örneğidir bu.

13.1 SİMETRİLER VE KORUNUM KANUNLARI: NOETHER TEOREMİ

*Momentumun Korunumu. Bu korunum kanunu yalnızca toplam kuvvet sıfır olduğu zaman geçerlidir. Ama bu da potansiyel enerjinin her yerde tekdüze olması demektir:**

$$F_{toplam} = -\frac{dU_{toplam}}{dx} = 0$$

Yani potansiyel enerji U_{toplam} her yerde aynı. Hiçbir özel nokta olmaması anlamına gelir bu; potansiyel enerjinin maksimum veya minimum olduğu noktalar yoktur, hatta potansiyel enerjinin, başka herhangi bir yerdeki değerinden birazcık daha yüksek ya da daha düşük olduğu noktalar da yoktur. Uzaydaki bütün noktalar birbirine denktir. İşte buna simetri denir.

"Yer değişimine göre simetri:" Nereye giderseniz gidin potansiyel enerji bakımından hiçbir fark olmaz.

Bütün yer değişimleri altında simetri varsa, momentum korunur. Bu çok temel bir ilkedir, adına da Noether Teoremi denir:**

Eğer bir sistemde simetri(ler) varsa, dinamik kanunları korunumlu nicelikler ortaya çıkarır, burada zamanla değişmeyen şeyler, yani "hareket sabitleri" olacaktır.

Simetri varsa bir korunum kanunu geçerli olur.

Açısal momentumun korunumu ve enerjinin korunumu Noether Teoreminin diğer örnekleridir. Açısal momentum, kuvvet **F** iki cismi birleştiren **r**'ye paralelse korunuyor. Kuvvetin uzayda tercih ettiği başka bir yön yok. Demek ki bütün yönler eşdeğer; bu simetri, açısal momentumun korunumuna yol açıyor.

Enerjinin korunumu ise ancak enerjinin zamana *doğrudan* bağlı olmadığı durumda geçerlidir. Enerjinin korunumunu konuşurken buna açıkça dikkat çekmemiştik. Enerji (her biri elbette zamanla değişen) koordinatlara ve hızlara bağlıdır. Burada kastedilen enerji ifadesindeki katsayıların doğrudan zamana bağlı olmamasıdır. Mesela yayımızın sabiti k ve evrensel kütleçekimi sabiti G zamanla değişmiyor. Yine bir simetri var ve bu simetri enerjinin korunumu yasasına yol açıyor.

---

* "Sabit" kelimesini "zamanla değişmeyen" anlamında; "tekdüze" kelimesini ise "konuma bağlı olmayan" anlamında kullanıyoruz.

** Emmy Noether 19. yüzyılda yaşamış bir matematikçiydi. Newton'un dinamik kanunları için simetriler ve korunum kanunları arasındaki genel ilişkiyi ispat etti. Noether Teoremi kuantum mekaniği ve görelilik için de geçerlidir.

PROBLEMLER

1. r yarıçaplı bir daire üzerinde, P periyoduyla düzgün dairesel hareket yapan m kütleli bir parçacığın açısal momentumu kaçtır?

2. r yarıçapına ve ω açısal hızına sahip dairesel harekette, yarıçap vektörünün altındaki alanın artış oranı nedir?

3. Kepler, gezegenlerin eliptik yörüngeleri olduğunu, Güneş'in de bu elipslerin odaklarından birinde olduğunu keşfetti.
   (a) Açısal momentumun korunumuna göre, bir gezegenin Güneş'e en yakın olduğu yer, onun en hızlı hareket ettiği yer mi yoksa en yavaş hareket ettiği yer midir?
   (b) Gezegenin r_{min}'deki sürati v_1'in, r_{maks}'taki sürati v_2'ye oranı nedir?
   (c) r_{min}'deki $\omega = d\theta/dt$ açısal hızının, r_{maks}'takine oranı nedir?

4. Bisiklet sürerken, bisikletin dönen tekerlekleri açısal momentumunun korunmasından dolayı düz durur.
   (a) Bisiklet hareket halindeyken, dönen tekerleğin açısal momentumu hangi yöne doğrudur?
   (b) Bisikletinizi sürerken sola yatarsanız ne tarafa "tork" ($\mathbf{r} \times \mathbf{F}$) uygulamış olursunuz?
   (c) Tekerleğin açısal momentumundaki değişmeye tork yol açar. (Denklem 13.5'e bakın). Açısal momentumdaki değişim hangi yöndedir?
   (d) Son açısal momentumun yönü nedir?
   (e) Bu, tekerleğin yönünü nasıl etkiler?

14
Kütleçekimi ve Kepler Problemi

Newton, doğanın temel kuvvetlerinden birinin, her kütlenin diğer her kütleye uyguladığı *kütleçekiminin* ayrıntılı biçimini keşfetti. Kütleçekimi zayıfça bir kuvvettir ama erimi uzundur. Kütleçekimi büyük kütleler arasında önemlidir. Dünya'nın, Güneş'in, Ay'ın, gezegenlerin ve yıldızların, *"gök cisimlerinin"*, hareketlerini belirleyen kuvvet budur. İki kütle arasındaki kütleçekimi kuvveti, bu kütlelerle doğru orantılı ve ikisinin arasındaki mesafenin karesiyle ters orantılıdır:

$$\mathbf{F}_{G;2,1} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\ \hat{\mathbf{e}}_{r;2,1} \tag{14.1}$$

Bu denklemde $F_{G;2,1}$, M_2 kütleli cismin M_1 kütleli cisim üzerinde uyguladığı kütleçekimi kuvveti, G de Newton'un kütleçekimi sabitidir. SI birimleriyle değeri $G \cong 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3\ s^{-2}\ \mathrm{kg}^{-1}$'dir.

Aynı kütle, hem kütleçekimi kuvvetinde, hem de Newton'un İkinci Kanununun "*ma*" kısmında *eylemsizlik kütlesi* olarak karşımıza çıkar. Kütle böylece kütleçekimi problemlerinde Newton'un İkinci Kanununun iki tarafından da kalkmış olur. *İlk olarak Galileo'nun fark ettiği üzere, bütün kütleler aynı kütleçekimi ivmesiyle düşerler*.

Gezegenlerin hareketleri hakkındaki Kepler Kanunları, bütün kuvvetler için genel *hareket denklemi* olan *Newton'un İkinci Kanunundan* ve *Newton'un Kütleçekimi Kanunundan* çıkar. Aslında Newton, Kütleçekimi Kanununu, geriye doğru çalışarak Kepler Kanunlarından çıkarmıştı. Newton'un Kütleçekimi Kanununu, eliptik yörüngeler için olan Kepler Kanunlarından çıkarmak ilke bakımından basit fakat matematiğinin bütün ayrıntılarına girince biraz karışıktır.*

Burada Kepler problemini dairesel yörüngeye sahip bir gezegen için işleyeceğiz. Kepler, gezegenlerin hareketi hakkındaki kanunlarını ampirik yoldan, Tycho Brahe'nin topladığı verileri inceleyerek bulmuştu.

---

* T. Terzioğlu, "Gökten Bir Elma Düştü," *Matematik Dünyası*, 2006-1, s. 67-71.

Kepler Kanunları şöyle der:

I. Gezegenler eliptik yörüngelerle Güneş'in çevresinde hareket ederler, Güneş elipsin odaklarından birindedir.

II. Bir gezegeni Güneş'e bağlayan çizgi, gezegen Güneş'in çevresindeki yörüngesinde hareket ederken eşit alanları eşit sürede kat eder (tarar).

III. Bir gezegen yörüngesinin periyodunun* karesi, yörüngenin ana ekseninin kübü ile orantılıdır.

Kütleçekimi kuvvetinin etkisi altındaki nesnelerin *kapalı yörüngeleri* elipstir. Buna dışmerkezliliği $e = 0$ olan özel elips, *daire*, ve *kuyrukluyıldızların* yörüngeleri gibi, $e \lesssim 1$ olan çok dışmerkezli elipsler de dahildir. Kütleçekimi etkisi altındaki yörüngeler *açık yörünge* de olabilir. Açık yörüngeler; 1'den büyük e dışmerkezliliklere sahip *hiperboller* ve *kaçış hızı* ile hareket eden nesnenin özel durumunda, $e = 1$ olan paraboldür. Bu yörüngelerin hepsi, *konik kesit* denen eğrilerdir.**

Dairesel bir yörüngede Kepler'in Birinci Kanunu sadece, Güneş'in dairesel yörüngenin merkezinde olduğunu söyler. Güneş'ten mesafe sabit ve yarıçapa eşit olduğundan dolayı, dairesel hareket için Kepler'in İkinci Kanunu, gezegenin daire üzerine sabit açısal hızla hareket etmesi anlamına gelir. Bu da düzgün dairesel harekettir.

Ardından, Newton'un İkinci Kanunundan çıkan Kepler'in Üçüncü Kanunu gelir. Kuvvet, Güneş'in Dünya'yı kütleçekimiyle çekmesidir. Düzgün dairesel hareket için ivme

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t) = -\omega^2 r \hat{\mathbf{e}}_r(t) \tag{14.2}$$

$\mathbf{r}$ de Güneş'ten Dünya'ya yönelen konum vektörüdür. Dünya'nın açısal hızı ω, Dünya'nın Güneş çevresindeki yörünge periyodu $P = 1$ yıl ile ilişkilidir: $\omega = 2\pi/P$.

İvmenin düzgün dairesel harekete özel bu biçimini kütleçekimi kuvvetiyle (Denklem 14.1) kullanınca Newton'un İkinci Kanunu şu hale geliyor:

$$\frac{GM_\odot}{r^2} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{P^2} \tag{14.3}$$

Burada $\odot$ sembolü Güneş'i temsil ediyor. Bu denklem şöyle ifade edilebilir:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} r^3 \tag{14.4}$$

---

* Yörüngenin periyodu: Gezegenin yörünge üzerinde bir turu tamamlaması için gereken zaman.

**Bkz. Sinan Sertöz, *Matematiğin Aydınlık Dünyası*, TÜBİTAK Yayınları, 2013 [1996].

Bu eşitlik Dünya'nın kütlesine bağlı değil, yalnız Güneş'inkine bağlıdır. Dünya'nın kütlesi, kütleçekiminin çok önemli bir özelliğinden, çekim kültesinin eylemsizlik kütlesine eşit olmasından dolayı denklemden kalktı. Denklem 14.4 için orantı sabiti sadece Güneş'in kütlesine bağlıdır. Denklem 14.4 dairesel yörüngeye sahip bütün gezegenler için aynıdır: Dairesel yörüngeler için Kepler'in Üçüncü Kanunundan başka bir şey değildir bu. Eliptik yörüngeye sahip bir gezegen için de Denklem 14.4 yine geçerlidir, tek değişiklik dairenin yarıcapı *r*'nin yerine uzun eksenin yarısının (yarı büyük eksen, *a*) girmesi olur:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} a^3 \tag{14.5}$$

PROBLEMLER

1. Dünya, Güneş'in çevresindeki yörüngesini 1 yılda tamamlıyor. Dünya'nın yörüngesi, dışmerkezliliği (eksantrikliği) *e* çok küçük olan bir elipstir, yani hemen hemen bir dairedir. Büyük eksenin uzunluğunun yarısı *yarı büyük eksen*, *astronomi birimi, a.b.* denen, Dünya'nın Güneş'ten ortalama mesafesine hemen hemen eşittir: 1 a.b. ≅ 1,5 × 10^8 km. Jüpiter yılının uzunluğunu öğrenin. Jüpiter'in yörüngesinin boyutları nedir: Jüpiter'in yörüngesinin yarı büyük eksenini a.u. ve km cinsinden ifade edin.

2. **Newton, Elma ve Ay:** Newton elmanın ağaçtan Dünya'nın merkezine doğru, kütleçekimi kuvvetinden dolayı düştüğünü fark etti. Kütleçekimi kuvvetinin Ay'a kadar uzanıyor olması gerektiğini de fark etti ve Ay'ın yörüngesel hareketini Dünya'ya doğru sürekli bir düşüş olarak açıkladı, yeterince büyük bir hızla yatay olarak fırlatılan bir güllenin Dünya'ya doğru düşüp düşüp yere hiç ulaşmaması gibi.

   Elmanın ve Ay'ın Dünya'nın merkezine doğru ivmesini ve mesafesini karşılaştırarak, kütleçekimi kuvvetinin bir "ters kare kanununa" uyması gerektiğini anladı. Kütleçekimi kuvveti mesafenin karesiyle ters orantılıydı.

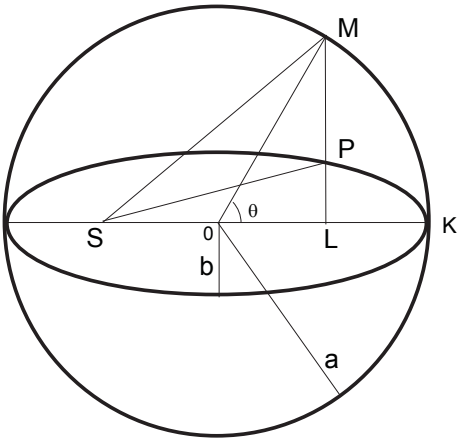
   Buna bir bakalım: Ay'ın Dünya etrafındaki yörüngesini dairesel kabul edelim, bu yörüngenin yarıçapı 3,8 × 10^8 m, periyodu ise 28 gün. Dünya'nın yarıçapı 6400 km. Elmanın ivmesi g = 9,8 m/s^2.

   (a) Ay'ın Dünya'ya doğru "düştüğü" ivmeyi hesap edin.

   (b) Ay'ın ivmesinin elmanın ivmesine oranı nedir?

   (c) Newton'un evrensel kütleçekimi kanununa göre bu oran ne olmalıdır?

3. (* Zor – Zafer Gedik) Kepler'in Birinci Kanununa göre, her *P* gezegeninin yörüngesi, bir odağında Güneş'in (*S*) bulunduğu bir elipstir. İkinci Kanun, (SKP)



diliminin alanı $A(t)$'nin düzenli olarak değiştiğini söylüyor. a ve b elipsin sırasıyla yarı büyük ve yarı küçük eksenleri olsun, periyodu ise T ile gösterelim. Elipsin P noktası, şekilde görüldüğü gibi, a yarıçaplı bir daireden, her [ML] doğru parçasını şu şekilde bölerek bulunabilir:

$$\frac{|\mathrm{LP}|}{|\mathrm{LM}|} = \frac{b}{a}$$

Elipsin alanının $ab\pi$ olmasının nedeni de budur; dairenin alanı πa^2'nin b/a oranıyla çarpımından ibarettir bu. $|\mathrm{S0}| = \sqrt{a^2 - b^2}$ olduğu kolayca gösterilebilir.

(a) $A(\mathrm{SKM})$, SKM diliminin alanı ise, neden $A(t) = \dfrac{b}{a}\, A(\mathrm{SKM})$ olduğunu açıklayın.

(b) $A(\mathrm{SKM}) = A(\mathrm{SOM}) + A(\mathrm{OKM})$ olmasından faydalanarak,

$$A(\mathrm{SKM}) = \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\sin\theta + \theta\right)$$

olduğunu gösterin.

(c)

$$\frac{2\pi}{T}t = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\sin\theta + \theta$$

olduğunu doğruladıktan sonra, $\theta = 0, \pi/2, \pi$ için $\theta = 0, \pi/2, \pi$ için $\dfrac{2\pi}{T}t$'yi hesaplayın ve bulduğunuz sonucu yorumlayın.

15
Ek Sorular — Mekanik

1. *M* kütleli bir çocuk atlıkarıncaya binmiş, bir daire üzerinde gidiyor, bir yandan da aşağı yukarı hareket ediyor, öyle ki konumu

$$\mathbf{r} = R\cos(\omega t)\mathbf{i} + R\sin(\omega t)\mathbf{j} + h\sin(5\omega t)\mathbf{k}$$

şeklinde değişiyor. $\frac{d}{du}(\cos u) = -\sin u$ ve $\frac{d}{du}(\sin u)$ formüllerini kullanarak,

(a) Hız vektörü $\mathbf{v}(t)$'yi bulun.

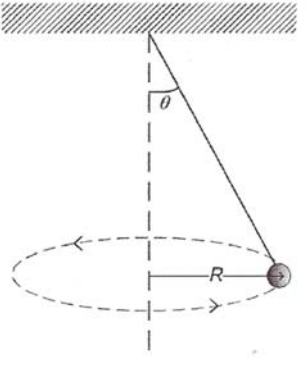
(b) İvme vektörü $\mathbf{a}(t)$'yi bulun.

(c) Çocuk üzerinde etki eden toplam kuvvet $\mathbf{F}(t)$'yi bulun.

(d) Kısa bir dt zaman aralığı içinde kat edilen küçük yer değişimi $d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t)dt$. Yapılan iş $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$'yi bulun.

2. **T** gerilim kuvvetine sahip bir ipin ucundaki *M* kütleli top, *R* yarıçaplı dairesel bir hat üzerinde sabit hızla hareket ediyor (Şekil 15.1).

(a) Diyagramdaki bütün kuvvet vektörlerini gösterin.



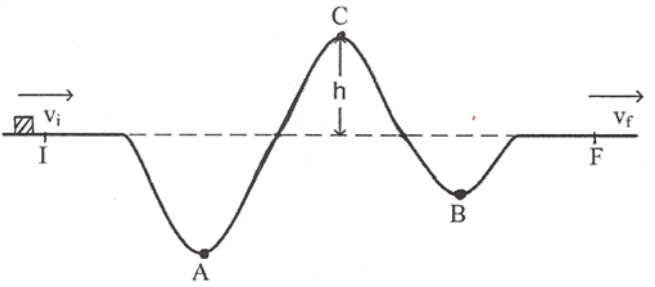
Şekil 15.1

(b) Hareket denklemi **F** = *m***a**'nın dikey ve yatay bileşenlerini yazın.

(c) Hız v'yi θ, R ve kütleçekimi ivmesi g cinsinden bulun

(d) Açısal hız ω nedir?

(e) Periyot P nedir?



Şekil 15.2

3. Bir kutu, v hızıyla Şekil 15.2'te gösterilen sürtünmesiz yolda hareket ediyor.

   (a) Kararlı denge noktalarını şekil üzerinde gösterin.

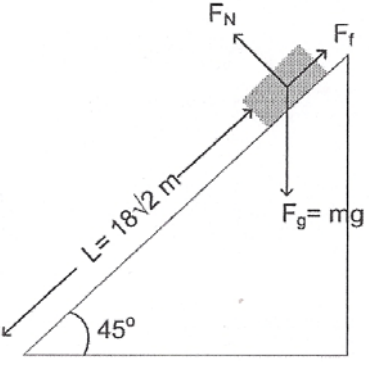
   (b) Kararsız denge noktalarını gösterin.

   (c) Eğer kutu B noktasına varacaksa, ilk hız v_i'nin minimum değeri nedir?

   (d) Kinetik enerji hangi noktada en yüksektir?

   (e) F noktasında son hız v_f ne kadar?

4. 3 kg kütleli bir kutu, Şekil 15.3'te görüldüğü gibi $18\sqrt{2}$ m uzunluğunda ve eğim açısı $\theta = 45°$ $(\sin\theta = 1/\sqrt{2}, \cos\theta = 1/\sqrt{2})$ olan bir eğik düzlemin tepesinde durur vaziyetten bırakılıyor.



Şekil 15.3

Sürtünme kuvvetinin büyüklüğünü $F_{sr} = 0{,}1F$N eşitliği veriyor, burada FN düzlemin kutuya uyguladığı normal kuvvet.

Kütleçekimi ivmesini $g = 10$ ms^{-2} olarak alın.

(a) Normal kuvvetin büyüklüğü nedir?

(b) Bu hareket esnasında normal kuvvet tarafından yapılan iş nedir?

(c) Bu hareket esnasında sürtünme tarafından yapılan iş nedir?

(d) Bu hareket esnasında kütleçekimi tarafından yapılan iş nedir?

(e) Kütleçekimi potansiyel enerjisinin ilk ve son değerleri U_i ve U_s nedir?

(f) Kutunun son hızı nedir?

5. İki oksijen atomunun arasındaki potansiyel enerji $U(r)$ yaklaşık olarak şöyle:

$$U(r) = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}$$

Burada $U(r)$, elektron-voltla (eV, 1eV = 1,6 × 10^{-19} Joule) ölçülüyor, atomların arasındaki mesafe r'nin ölçü birimi de Angström (= 10^{-10} m).

(a) Büyük r'lerde (r sonsuza giderken) $U(r)$ nasıl davranır? Ya çok küçük r'lerde (r sıfıra giderken)?

(b) Potansiyel enerji $U(r)$ hangi noktada sıfırdır? Potansiyel enerji $U(r)$'yi çizin.

(c) Atomlar arası kuvvet $F(r)$'yi, mesafe r'nin fonksiyonu olarak bulun. Kuvvet $F(r)$ hangi noktada sıfırdır?

(d) Minimum enerji değeri U_{min}'i bulun. Enerji hangi r_0 konumunda minimum olur?

6. Üç boyutta hareket eden bir nokta parçacığın konum vektörü, m cinsinden, $\mathbf{r} = (2t^2 + 1)\,\mathbf{i} - t^3\,\mathbf{j} + 5t\,\mathbf{k}$ olsun.

(a) $t = 0$ ve $t = 2$ s'de parçacığın konumunu bulun.

(b) $t = 0$ ve $t = 2$ s arasında parçacığın yer değiştirmesi ne kadardır?

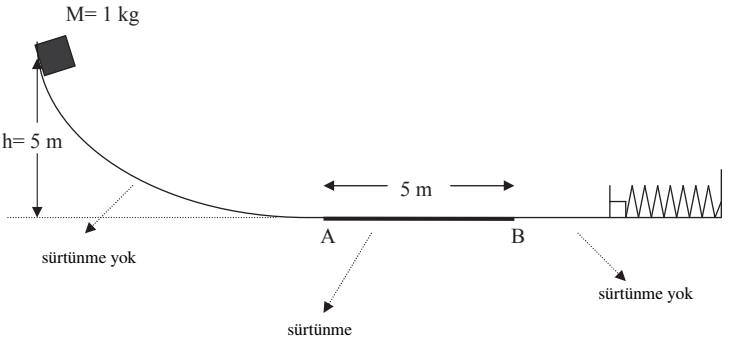
(c) Zamanın fonksiyonu olarak parçacığın hızını bulun.

(d) $t = 1$ s'de hızın büyüklüğü ne kadardır?

(e) Zamanın fonksiyonu olarak ivme vektörünü bulun.

7. $M = 1$ kg kütlesinde bir cisim, Şekil 15.4'de görülen hatta kayıyor. Cisim başlangıçta, şekilde görüldüğü gibi $h = 5$ m yüksekliğinde duruyor. Yüzey, A ve B noktaları arasındaki kısım hariç sürtünmesiz, A ile B arasında ise hattın yüzeyiyle cisim arasındaki kinetik sürtünme katsayısı $\mu = 0{,}2$. ($g = 10$ m/s alın.)

(a) A noktasında cismin hızını bulun.



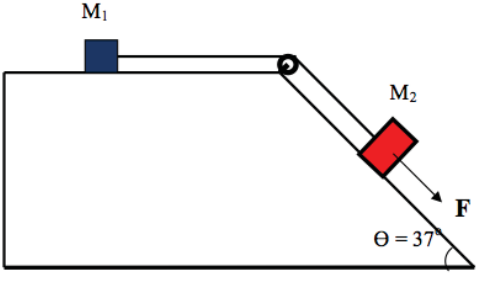
Şekil 15.4

(b) Cisim A ile B noktaları arasındayken sürtünme kuvveti ne kadar?

(c) A ve B noktaları arasında sürtünme kuvveti tarafından yapılan işi bulun.

(d) B noktasında kinetik enerji ne kadar?

(e) x mesafesine sıkıştırılmış bir yayın potansiyel enerjisi $U(x) = \frac{1}{2}\,kx^2$. Şekilde gösterilen yayın, M kütlesini 0,4 m sıkışarak durdurması için yay sabiti k kaç olmalı?



Şekil 15.5

8. $M_1 = 2$ kg ve $M_2 = 10$ kg kütlesinde iki kutu bir iple birbirine bağlı. M_2 kütlesi, Şekil 15.5'de gösterildiği gibi eğik düzleme paralel bir F kuvveti ile çekiliyor. Şekilde gösterilen makara sürtünmesiz, sabit ve kütlesi göz ardı edilebilir (kütlesi sıfır). (a)'dan (d)'ye kadar, kutular ve düzlem yüzeyleri arasında hiç sürtünme olmadığını farz edin. (sin 37° = cos 53° = 3/5 ve cos 37° = sin 53° = 4/5)

(a) M_1 ve M_2'nin serbest cisim diyagramlarını çizin.

(b) M_1 ve M_2'nin hareket denklemlerini yazın.

(c) Kütlelerin ivmelerinin ortak büyüklüğünü bulun.

(d) İp üzerindeki gerilim kuvveti T'nin büyüklüğünü bulun.

(e) Şimdi, M_1 ile yatay düzlemin yüzeyi arasında sürtünme olduğunu farz edin (eğik düzlemde sürtünme hâlâ yok). Kütlelerin durur vaziyette kalmaları için gereken minimum sürtünme katsayısı μ nedir?

9. Kütleleri m_a ve m_b olan A ve B gezegenleri, M kütlesindeki bir yıldızın etrafında sırasıyla R_A ve R_B yarıçapındaki dairesel yörüngeleri üzerinde hareket ediyorlar. Gezegenlerinin birbiriyle etkileşiminin kütleçekimi kuvveti göz ardı edilebilir düzeyde olsun. Yıldızın kütlesi M, gezegenlerin kütlelerinden çok daha büyük, öyle ki yıldızın kütlesi iki gezegenin de dairesel yörüngelerinin merkezi olarak alınabilir.

(a) Gezegenlerin her birinin $F = ma$ hareket denklemini yazın, kuvvetleri ve ivmeleri belirtin.

Gezegene ait aşağıdaki özelliklerin oranlarını, gezegenlerin yörünge yarıçapları R_A ve R_B cinsinden bulun:

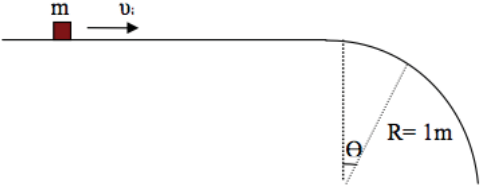
(b) yörünge hızları V_A ve V_B.

(c) yörünge periyodları P_A ve P_B.

(d) açısal hızlar (ω_A ve ω_B).

(e) kinetik enerjiler (K_A ve K_B).

(f) potansiyel enerjiler (U_A ve U_B).



Şekil 15.6

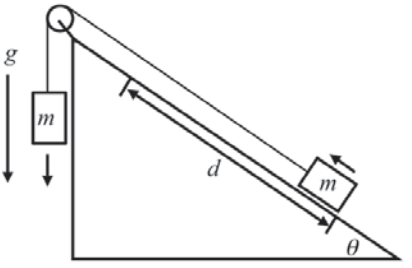
10. m = 1 kg kütleli bir cisim, Şekil 15.6'deki gibi sürtünmesiz bir buz yüzeyden, v_i = 1 m/s başlangıç hızıyla kayıyor. Buz yüzey, sürtünmesiz bir dairesel profille bitiyor. Dairesel kısmın yarıçapı 1 m. Kritik bir $\Theta = \Theta_{krit}$ açısında m kütlesi buz yüzeyden ayrılmadan aşağı kayacak. g = 10 m/s^2 alın.

(a) Kutu dairesel yüzey üzerinde, dikey düzleme Θ açısında iken kutunun serbest cisim diyagramını çizin ve dairesel hareket için $F_{toplam} = ma$ hareket denklemini yazın.

(b) Θ_{krit} açısını bulun.

(c) $\Theta = \Theta_{krit}$ iken kutunun hızı kaçtır?

11. Şekil 15.7'de görüldüğü gibi, *m* kütlesine sahip iki cisim sürtünmesiz bir makaradan geçen bir iple birbirine bağlanmış. Eğik düzlemin yüzeyi ile sağdaki kütle arasında *F* sabit sürtünme kuvveti var. Kütleler durur konumdan serbest bırakılıyor. Sağdaki kütle eğik düzlemden yukarı bir d mesafesini kat ederken yay tamamen gergin kalıyor, bu noktada kütleler *v* hızıyla hareket ediyorlar.



Şekil 15.7

(a) Sistemin başlangıçtaki toplam mekanik enerjisi ne kadar?

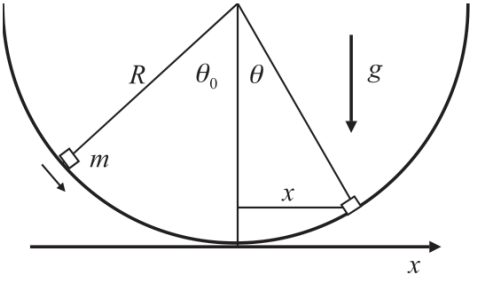
(b) Sistemin son toplam mekanik enerjisi ne kadar?

(c) Bilinen niceliklerle ve sürtünme kuvveti *F* ile bu problem için iş-enerji teoremini yazın. Sürtünme kuvveti tarafından yapılan işin önündeki işaret ne?

(d) *F*'yi *m*, *g*, *v* ve θ cinsinden ifade edin.

12. Bir *m* kütlesi, Şekil 15.8'deki gibi sürtünmesiz yarımküre şeklinde bir çanakta dikey düzleme θ_0 açısı ile durur vaziyetten serbest bırakılıyor.

(a) İlk enerji nedir?



Şekil 15.8

(b) Kütle θ açısındayken kinetik enerji nedir?

(c) Kütlenin dibe yakın yerde, $\theta \ll 1$ radyan iken yaptığı ufak salınımları ele alalım, öyle ki $v \cong v_x$, $x = R \sin\theta \cong R\theta$ ve $\cos\theta \cong 1 - \frac{1}{2}\theta^2$. Toplam mekanik enerjinin

$$E \approx \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

şeklinde yazılabileceğini gösterin.

(d) Yay-kutu sistemi için açısal frekansın $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ olduğunu hatırlayın. (c) kısmında bulduğunuz k'yi yerine koyup bu sistem için ω'yı bulun.

13. M kütleli büyük bir yıldızın kütleçekimi alanında hareket eden m kütleli bir gezegen için toplam mekanik enerji E şöyle yazılabilir:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Burada $v_{\parallel} = v_r$ radyal yöndeki hız bileşeni, r gezegen ile yıldız arasındaki uzaklık, $l = mv_{\perp}r$ açısal momentum ve G de kütleçekimi sabiti. $v_{\perp} = v_{\theta}$ ise hızın radyal yöne dik olan bileşeni.

(a) $l \neq 0$ olduğunu farz ederek etkin radyal potansiyeli çizin:

$$V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

(b) $V(r)$'nin türevini sıfıra eşitleyerek $V(r)$'nin minimum değerini aldığı r_{min} yarıçapını bulun.

(c) $F_G = GMm/r^2$ kütleçekimi kuvveti, merkezcil ivme $a = v_{\perp}^2/r$'yi sağladığında r_{min}'in dairesel yorungenin yarıçapından başka bir şey olmadığını gösterin.

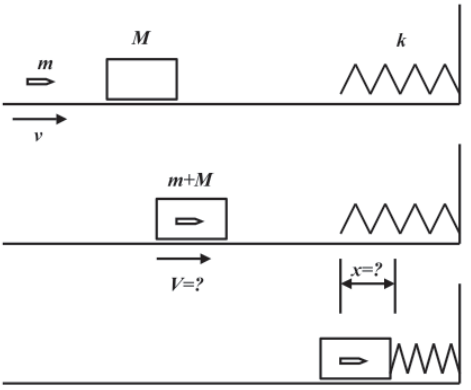
(d) Şimdi de $V(r)$'nin sıfıra eşit olduğu r_0 yarıçapını bulun.

(e) (d)'de bulduğunuz sonucu kullanarak, $E = 0$ olduğunda, $v_{\perp}$'in, kaçış hızından

$$v_{kaß} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

başka bir şey olmadığını gösterin. m kütlesi bu durumda nasıl bir yörüngeyi izliyor?

14. $v = 1010$ m/s ile yol alan $m = 10$ gr kütlesinde bir kurşun, başlangıçta durur konumda olan $M = 1$ kg kütlesinde bir kutuya çarpıp onu ileriye doğru itiyor (Şekil 15.9).



Şekil 15.9

(a) Kurşun kutuyu vurduktan hemen sonra kutunun (artı kurşunun) hızı nedir?

(b) Kutu, duvara bağlı bir yaya çarpıyor ve duruyor. Eğer yay sabiti k, $1{,}01 \times 10^4$ N/m'ye eşit ise, kutu durduğunda yay ne kadar sıkışır? Yayda biriken potansiyel enerji ne kadardır?

15. Sürtünmesiz yatay bir masa üzerinde bir yaya tutturulmuş 1 kg'lık bir kütle, denge durumundan 5 cm çekiliyor ve durur vaziyetten serbest bırakılıyor. Bunun üzerine kutu $T = 1$ s periyoduyla salınıyor.

(a) Açısal frekans ω ve yay sabiti k'yi bulun.

(b) Zamanın fonksiyonları olarak konumu $x(t)$ ve hızı $v(t)$ bulun.

(c) Zamanın fonksiyonu olarak kinetik enerjiyi bulun.

(d) Zamanın fonksiyonu olarak potansiyel enerjiyi bulun.

(e) (c) ve (d)'den toplam enerjiyi bulun.

16. m kütlesine sahip bir parçacık, radyal yönde $F = -Ar^3$ çekim kuvvetinin etkisinde.

(a) $-dU/dr = F$ eşitliğini sağlayan potansiyel enerji $U(r)$'yi bulun.

(b) Açısal momentum sabit mi? Neden? Kepler'in İkinci Kanunu (eşit alanlar eşit sürede taranır...) bu problemde geçerli mi?

(c) Bu kuvvetin etkisi altında r yarıçaplı dairesel bir yörünge için açısal hız ω'yı bulun.

17. Bir model roket, durur konumdan, 5,0 s devam eden 4,0 m/s^2 toplam sabit dikey ivme ile yukarı fırlatılıyor. 5,0 s sonra yakıtı tükenince, serbest bir parçacık olarak yukarı doğru gitmeye devam ediyor, sonra da gerisingeri aşağı

düşüyor. Dünyanın kütleçekiminden kaynaklanan ivmeyi g = 10 m/s^2 olarak alın.

(a) t = 5,0 s zamanında roketin hızı ve yüksekliği nedir?

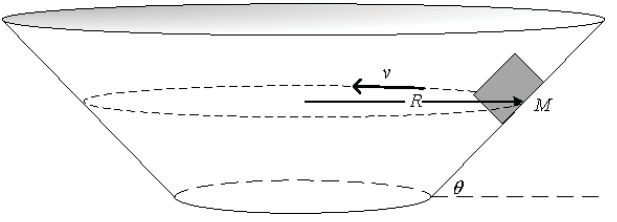
(b) Varılan maksimum yükseklik ne kadardır?

(c) Kalkıştan roketin maksimum yüksekliğe varmasına kadar geçen toplam zaman ne kadardır?

(d) Kalkıştan roketin yere çarpmasına kadar geçen toplam zaman ne kadardır?

(e) Roket yere çarptığında hızı ne kadardır?

18. M kütlesinde bir kutu, v sabit hızıyla, sürtünmesiz bir yüzeyde R yarıcaplı dairesel bir hat üzerinde hareket ediyor (Şekil 15.10).



Şekil 15.10

(a) Bütün kuvvet vektörlerini diyagramda gösterin.

(b) **F** = M**a** hareket denkleminin yatay ve dikey bileşenlerini yazın.

(c) v hızını, θ, R ve kütleçekimi ivmesi g cinsinden bulun

(d) Açısal hız ω ve periyot P nedir?

19. Kütlesi m = 10 kg olan bir cisim x ekseni boyunca hareket ediyor. Konum, zamanla $x(t) = t^4$ şeklinde değişiyor.

(a) Hız $v(t)$'yi bulun.

(b) İvme $a(t)$'yi bulun.

(c) Cisim üzerine etki eden kuvvet $F(t)$'yi zamanın bir fonksiyonu olarak bulun.

(d) Zaman t'yi, cismin o zamandaki konumu x cinsinden ifade edin ve bunu $F(t)$'de yerine koyarak, cisme etki eden kuvveti konumun bir fonksiyonu olarak ($F(x)$) bulun.

(e) Potansiyel enerji $U(x)$'i bulun.

(f) $t = 0$, $x = 0$'dan $t = 1$ s, $x = 1$ m'ye kadar parçacık üzerinde yapılan toplam işi bulun.

20. Kütlesi 2 kg olan bir kutu, potansiyel enerjisi Joule birimiyle $U(x) = 16x^2 - 2x^3 + x^4$ olacak şekilde, yayların bulunduğu tek boyutlu bir hatta hareket ediyor. Sürtünme yok.

    (a) Denge noktası $x = 0$'dan, "küçük" x uzaklıkları için potansiyel enerjinin yaklaşık biçimi nedir? Bu yaklaşıklık için x ne kadar küçük olmalıdır?

    (b) Denge noktası civarındaki salınımların frekansı ω kaçtır?

    (c) $t = 0$ zamanında kutu $x = 2$ m'de dururken serbest bırakılıyor. Kutunun toplam enerjisi ne kadardır?

    (d) Zamanın bir fonksiyonu olarak konum $x(t)$ nedir?

    (e) Şimdi hattın üzerine bir miktar toz atıldığını, böylece sabit bir $F_s = 8$ N sürtünme kuvveti olduğunu farz edin. Kutu yine $x = 2$ m'de dururken serbest bırakılıyor. Kutu denge noktası $x = 0$'da durmadan önce ileri geri gidip geldiği toplam mesafe ne kadardır?

21. m kütleli bir uydu Dünya'nın çevresinde dairesel bir yörünge üzerinde. Uydunun hızı v_0, yörüngenin yarıçapı ise r_0. Dünya'nın kütlesi de M .

    (a) Bu dairesel hareket icin $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ hareket denklemini yazın.

    (b) Kütleçekimi potansiyel enerjisi $U(r)$ nedir?

    (c) Hareket denklemini kullanarak toplam enerjinin $E_0 = \alpha U\ (r_0)$ olduğunu gösterin. α'nın değeri nedir?

    (d) Açısal momentum vektörü $\mathbf{L}$ nedir? Bir resim çizerek $\mathbf{L}$'nin yönünü gösterin.

    (e) Kinetik enerjiyi ve toplam enerjiyi açısal momentum L, m ve r_0 cinsinden ifade edin.

22. Başlangıçta durur vaziyette olan 1 kg'lik bir cisim, $\mathbf{F} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ N etkisiyle $\mathbf{r_1} = (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$ m'den $\mathbf{r_2} = (5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k})$ m'ye 2 saniyede gidiyor.

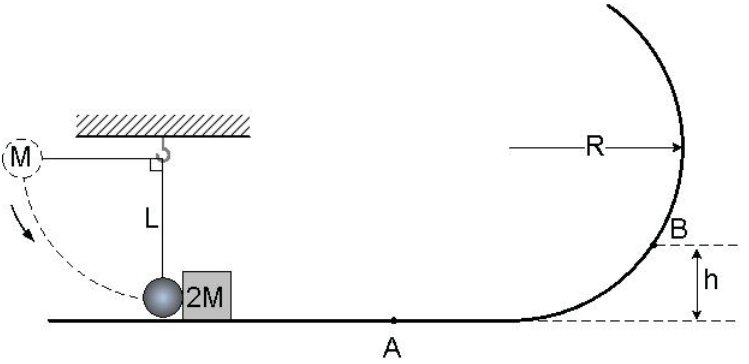
    (a) Ortalama hız $\mathbf{v}$'yi bulun.

    (b) İvme $\mathbf{a}$'yı bulun.

    (c) $t = 2$ s'de hızı bulun.

    (d) Cisim üzerinde yapılan toplam işi bulun.

23. L uzunluğunda bir iple asılmış M kütleli top, Şekil 15.11'de görüldüğü gibi kaldırılıp bırakılıyor. Top, 2M kütleli, duran bir kutuyla esnek çarpışıyor ve kutuyu sürtünmesiz bir yüzey üzerinde harekete geçiriyor.



Şekil 15.11

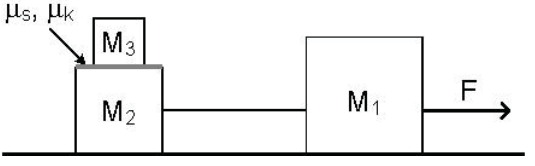
(a) Topun bırakılmadan önceki potansiyel enerjisini bulun.

(b) Kutunun A noktasındaki hızını bulun.

(c) Kutunun ulaşabileceği maksimum yüksekliği bulun.

(d) Kutu yatay düzlemden yüksekliği h ($h = L/4$) kadar olan B noktasından geçerken kutunun merkezcil ivmesinin ne kadar olduğunu bulun.

24. Şekil 15.12'deki gibi, 3 kütleden oluşan bir sistem, F kuvveti ile çekiliyor. Yatay yüzey sürtünmesiz fakat M_2 ve M_3 kütleleri arasında sürtünme var (statik sürtünme katsayısı: μs, kinetik sürtünme katsayısı da μk).



Şekil 15.12

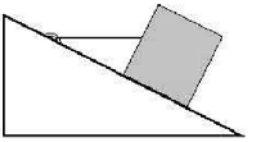
(a) Her kütle için serbest cisim diyagramını çizin.

(b) M_3'ün M_2'nin üstünde kalması durumunda M_1 kütlesinin ivmesini hesap edin.

(c) M_3 kütlesini hareket ettirecek kritik kuvvet $F = F_c$'yi belirleyin.

25. (a) Bir yarış arabası 280 km/saat sabit hızla, dairesel bir yarış pistinde turluyor. Araba üzerinde etki eden fiziksel kuvvet(ler)i kısaca açıklayın.

(b) Bir kutu, Şekil 15.13'de görüldüğü gibi sürtünmesiz bir eğik düzlemde

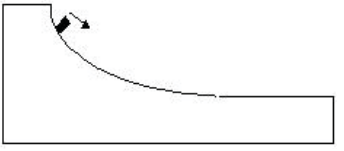


Şekil 15.13

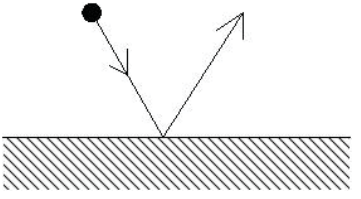
kütlesiz bir iple tutuluyor. Kutunun serbest cisim diyagramını çizin.

c) Bir kutu, Şekil 15.14'deki gibi sürtünmesiz bir rampadan aşağı kayıyor. İvme zamanla nasıl değişir? Cevabınızın nedenini kısaca açıklayın.

(d) Bir top, Şekil 15.15'de görüldüğü gibi esnek bir şekilde yerden sekiyor. Momentum değişimi Δp'nin yönü nedir? Nedenini açıklayın.



Şekil 15.14



Şekil 15.15

26. m noktasal kütlesi bir XY düzleminde hareket ediyor ve konum, zamanın fonksiyonu olarak şöyle veriliyor:

$$\mathbf{r}(t) = 3t\sin(\omega t)\mathbf{i} + 3t\cos(\omega t)\mathbf{j}$$

(a) Zamanın fonksiyonu olarak hızı $\mathbf{v}(t)$ bulun.

(b) Zamanın fonksiyonu olarak ivmeyi $\mathbf{a}(t)$ bulun.

(c) Zamanın fonksiyonu olarak kütlenin üzerinde etki eden kuvveti $\mathbf{F}(t)$ bulun.

(d) m kütlesi üzerinde $t = 0$'dan 1 s'ye kadar yapılan iş W'yi bulun.

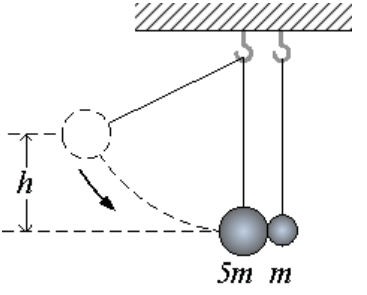
27. m = 1 kg kütlesinde bir top v_0 = 10 m/s hızla, yatay düzleme 45° açıyla yukarı doğru atılıyor. g = 10 m/s^2 farz edin.
    (a) Topun ulaşabileceği maksimum yüksekliği bulun.
    (b) Top yere çarpmadan önce kat ettiği maksimum mesafeyi bulun.
    (c) Yere çarptığı anda topun hızını bulun. (İpucu: hız bir vektördür!)
    (d) Bu hareket boyunca, başlangıçtan yere çarpmasına kadar kütle üzerinde yapılan işi bulun.

28. Farz edin ki başka bir evrende yaşıyoruz; bu evrende aralarında r mesafesi olan iki kütle, m_1 ve m_2 arasındaki kütleçekimi kuvveti şöyle:

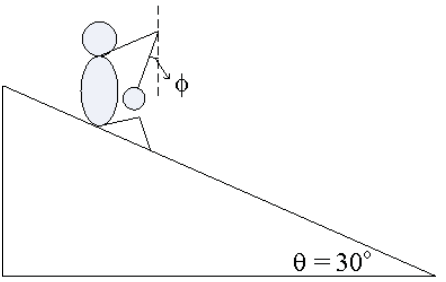
$$F(r) = -\frac{G' m_1 m_2}{r^4}$$

    Burada G' yeni bir kütleçekimi sabiti.
    (a) Bu evrendeki kütleçekimi potansiyel enerjisi $U(r)$'yi bulun.
    (b) Bu $U(r)$ potansiyel enerjisini r'nin bir fonksiyonu olarak çizin.
    (c) M_D kütlesine ve R_D yarıçapına sahip Dünya'dan, bir cismin kaçış hızı $v_{kaß}$'ı bulun.

29. m ve 5m kütlesinde iki küçük top, Şekil 15.16'de gösterildiği gibi iki iple asılmış. 5m kütleli top h yüksekliğine kaldırılıp bırakılıyor, top aşağı doğru giderek diğer kütleye çarpıyor. Çarpışma esneklikten tamamen yoksun, iki kütle çarpışmayla birbirine geçiyor.
    (a) 5m kütlesinin çarpışmadan hemen önceki hızını bulun.
    (b) Çarpışmadan hemen sonra birleşik kütle 6m'nin hızını bulun.
    (c) Birleşik kütlenin ulaşacağı maksimum yüksekliği bulun.
    (d) Çarpışmada kaybedilen enerji miktarını hesap edin.

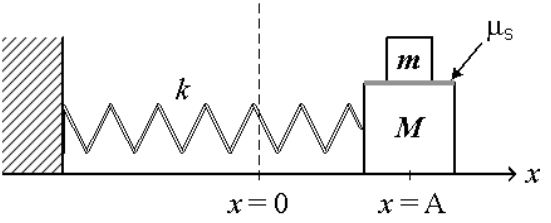


Şekil 15.16



Şekil 15.17

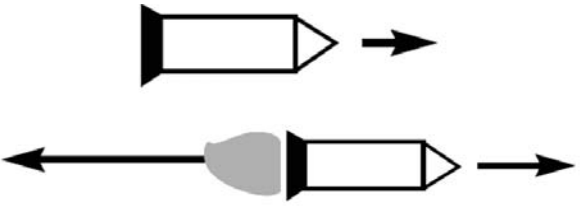
30. *M* kütlesinde bir çocuk, elinde *m* kütleli bir sarkaçla sürtünmesiz bir kaydıraktan kayıyor (Şekil 15.17). Kaydırağın yatay düzlemle açısı 30°. g = 10 m/s^2 kabul edin. [sin 30° = 1/2 ve cos 30° = $\sqrt{3}/2$]
    (a) Çocuk ve sarkacın serbest cisim diyagramını çizin.
    (b) Çocuk-sarkaç sisteminin ivmesini bulun.
    (c) Sarkacın dik eksenle açısı (ϕ)'yi bulun.



Şekil 15.18

31. *M* kütlesine sahip bir kutu sürtünmesiz bir masanın üstünde duruyor ve Şekil 15.18'de görüldüğü gibi *k* yay sabitine sahip yatay bir yaya bağlı. Yayın diğer ucu da duvara bağlı. Büyük kütle *M*'nin üzerinde *m* kütlesine sahip daha küçük bir kutu duruyor. Kutuların arasındaki statik sürtünme katsayısı μs. Kutular x = A'da serbest bırakılıyor ve salınıyorlar.
    (a) Kutular x = A'da iken her kütlenin serbest cisim diyagramını çizin.
    (b) Üstteki kutu *m*'nin büyük kutu *M*'den kaymayacağı maksimum salınım genliğini bulun.

32. 100 kg kütleli küçük bir roket 500 m/s hızla x yönünde yatay olarak hareket ediyor. Roket üzerindeki toplam dış kuvvet sıfır. 10 kg jet gazı, −400 m/s hızla $-x$ yönüne püskürtülüyor (Şekil 15.19). Püskürtme, Δt = 10 s süre boyunca, sabit bir püskürtme hızıyla gerçekleşiyor.



Şekil 15.19

(a) Jet püskürtülmeden önce roketin toplam momentumu ne kadardır?

(b) Jet püskürtüldükten sonra roket + jet sisteminin toplam momentumu ne kadardır?

(c) Jet püskürtüldükten sonra roketin hızı (büyüklük ve yön) nedir?

(a) Püskürtme sırasında jetin rokete uyguladığı kuvvetin büyüklüğü ve yönü nedir?

33. Aynı M kütlesine sahip iki kutu olan 1. kutu ve 2. kutu, aynı $t = 0$ anında, aynı $h = 0{,}2$ m yüksekliğinde sürtünmesiz iki eğik düzlemin tepesinden, durur vaziyetten serbest bırakılıyor (Şekil 15.20). İki düzlemin eğim açıları $\theta_1 = 45°$ ve $\theta_2 = 30°$. ($\sin 45° = \sqrt{2}/2$, $\sin 30° = 1/2$ ve $g = 10$ m/s^2 olarak alın).

(a) 1. kutu izlediği hattın sonuna vardığında hızı kaçtır?

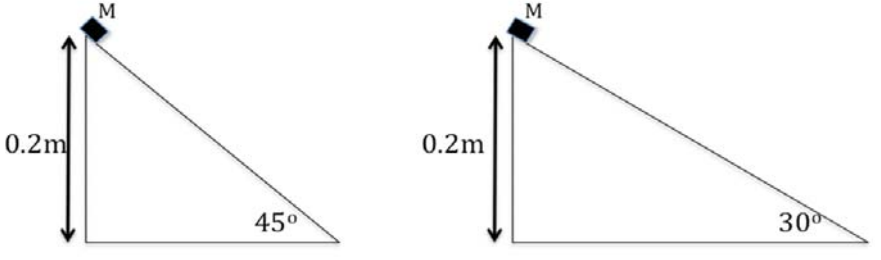
(b) 2. kutu izlediği hattın sonuna vardığında hızı kaçtır?

(c) 1. kutunun eğimden aşağı ivmesi ne kadardır?

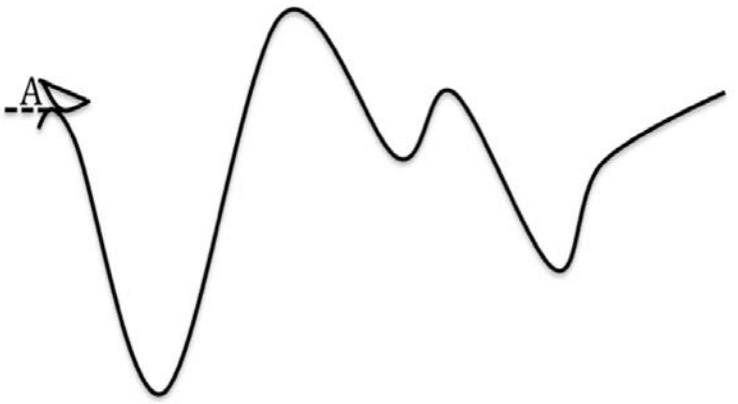
(d) 2. kutunun eğimden aşağı ivmesi ne kadardır?

(e) Dibe önce hangi kutu varır?

(f) m kütlesinde bir kutu, yüksekliği h, eğim açısı θ ve kinetik sürtünme katsayısı μ olan bir eğik düzlemin tepesinde durur vaziyetten serbest bırakılıyor. Dibe ulaşması için gereken süreyi g, h, θ ve μ cinsinden bulun.



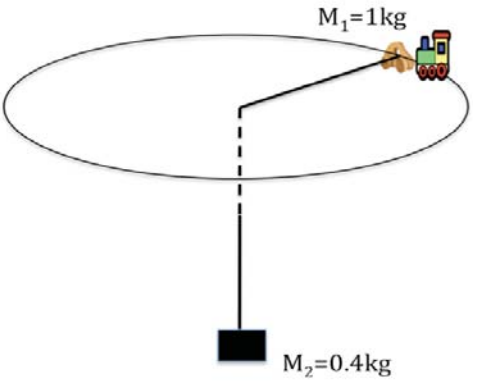
Şekil 15.20



Şekil 15.21

34. Bir kızak Şekil 15.21'de gösterilen yolu takip ediyor.
    (a) Yol üzerindeki denge noktalarını gösterin.
    (b) Bunlar arasında kararlı denge noktaları var mı? Hangisi/hangileri?
    (c) Kızak A noktasında dururken serbest bırakılıyor. Yolun sürtünmesiz olduğunu farz ederek, kızağın ulaşabileceği en uzak noktayı yolun üzerinde işaretleyin.
    (d) Kızak hangi noktada maksimum kinetik enerjiye sahip olur?
    (e) Şimdi yol üzerinde bir miktar sürtünme olduğunu farz edin. Hareketi tanımlayın. Kızak, sürtünme olmadığı zaman gittiği kadar uzağa gidebilir mi şimdi? Nerede duracaktır?

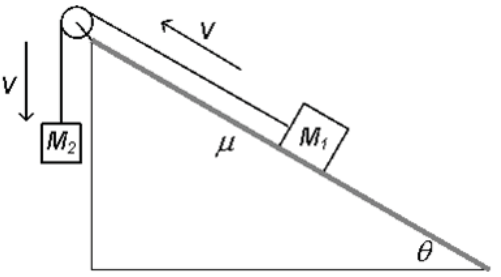
35. M_1 = 1 kg kütlesinde bir oyuncak araba, asılı ve durmakta olan bir M_2 = 0,4 kg kütlesine bağlı bir ipin uyguladığı T büyüklüğündeki gerilim kuvveti ile, 1 m yarıçaplı bir daire üzerinde hareket halinde tutuluyor (Şekil 15.22). F_e = 20 N büyüklüğünde kuvvet uygulayan bir oyuncak motor, oyuncak arabayı daireye teğet yönde itiyor. $F_s = -\alpha v$ sürtünme kuvveti de bu kuvvete karşı çalışıyor; buradaki v, daireye teğet olan hız vektörü. (*Bu problemde F_s normal kuvvetle ilgili DEĞİL*). Kütleçekimi ivmesini g = 10 m/s^2 kabul edin.
    (a) Asılı kütlenin serbest cisim diyagramını çizin.
    (b) Gerilim T'yi bulun.
    (c) Oyuncak arabanın serbest cisim diyagramını çizin.
    (d) Oyuncak arabanın hızı v nedir?
    (e) α sabitinin değeri nedir? Bunun birimleri nelerdir?



Şekil 15.22

36. 8 kg'lık bir kütle, potansiyel enerjisi Joule biriminde $U(x) = 16x^2 - x^4$ olan bir yaya bağlı olarak, tek boyutlu bir hat üzerinde hareket ediyor. Sürtünme yok.
    (a) Hangi x değerlerinde $U(x) = 0$ olur? x hangi değerleri aldığında $U(x)$ maksimum ve minimum olur? $U(x)$ potansiyel enerji eğrisini çizin.
    (b) Denge noktası $x = 0$'dan "küçük" x uzaklıkları için potansiyel enerjinin yaklaşık biçimi nedir? Bu yaklaşıklık için x ne kadar küçük olmalıdır?
    (c) Denge noktası civarındaki ufak salınımların frekansı ω nedir?
    (d) $t = 0$ zamanında kutu $x = 2$ m'de durur vaziyetten serbest bırakılıyor. Toplam enerji ne kadardır?
    (e) Hatta bir miktar toz atılıyor, böylece $F_s = 8$ N büyüklüğünde sabit sürtünme kuvveti oluşuyor. Kutu yine $x = 2$ m'de durur vaziyetteyken serbest bırakılıyor. Kutu $x = 0$'da denge noktasında durmadan önce ileri geri gidip gelerek kat edeceği toplam mesafe ne kadardır?

37. Kütleleri M_1 ve M_2 olan iki cisim Şekil 15.23'te görüldüğü gibi sürtünmesiz bir makara üzerinden geçen bir iple birbirine bağlı. İp kütlelerin her biri üzerinde T büyüklüğünde bir gerilim kuvveti uyguluyor. M_1 kütleli cisim θ eğim açılı ve kinetik sürtünme katsayısı μ olan bir eğik düzlem üzerinde. Bütün sistem şekilde gösterilen yönde sabit v hızıyla hareket ediyor.
    (a) Bu sistemin ivmesi ne kadar?
    (b) M_1 kütleli cismin serbest cisim diyagramını tüm kuvvetleri vektör olarak göstererek çizin.
    (c) Tüm kuvvetlerin eğik düzlem yüzeyine paralel bileşenlerini alarak M_1 kütleli cisim için eğik düzlem yüzeyi üzerindeki hareket denklemini (Newton'un 2. Kanunu) yazın.



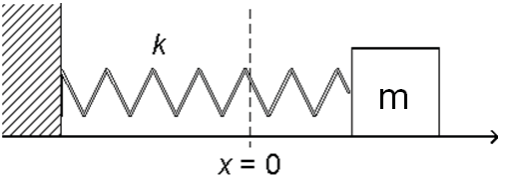
Şekil 15.23

(d) Tüm kuvvetlerin eğik düzlem yüzeyine dik bileşenlerini alarak M_1 kütleli cisim için eğik düzlem yüzeyine dik yöndeki hareket denklemini (Newton'un İkinci Kanunu) yazın.

(e) c) ve d)'de elde ettiğiniz eşitlikleri kullanarak T gerilim kuvvetini diğer parametreler cinsinden yazın.

(f) M_2 kütleli cisim için hareket denklemini (Newton'un İkinci Kanunu) yazın. T gerilim kuvveti için e) kısmında elde ettiğiniz ifadeyi kullanarak, kütlelerin oranı M_2/M_1'i diğer parametreler cinsinden bulun.

38. Sürtünmesiz yatay bir yüzey üzerinde bir yaya bağlı olarak Şekil 15.24'te görüldüğü gibi hareket eden 2 kg'lık bir kütlenin konumu zaman içinde $x(t) = 4 \sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$ m şeklinde değişmektedir. Veri: $\sin \pi/6 = 1/2$; $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$



Şekil 15.24

(a) $\omega^2 = k/m$ ilişkisini kullanarak yay sabiti k'yi hesaplayın.

(b) Cismin $t = 0$ s ânındaki hızı nedir?

(c) Zamanın fonksiyonu olarak kinetik enerjiyi bulun.

(d) Zamanın fonksiyonu olarak potansiyel enerjiyi bulun ($U = \frac{1}{2} kx^2$).

(e) Joule birimiyle toplam enerjiyi bulun.

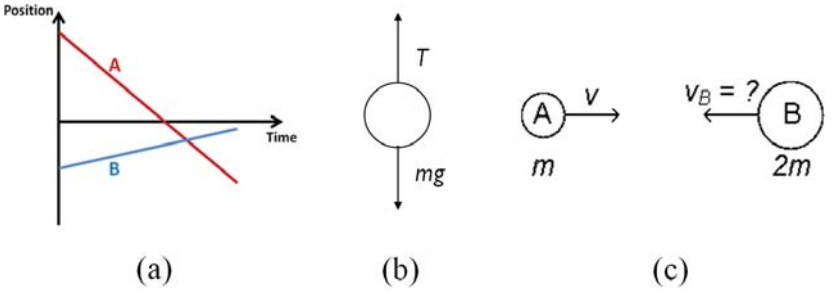
39. Dünyamız Güneş etrafındaki yörüngesini bir yılda tamamlar. Dünyanın yörüngesi daireye çok yakın, eksantrikliği çok küçük bir elips olduğundan Dünya'nın

Güneş'e ortalama uzaklığını iyi bir yaklaşımla eliptik yörüngenin büyük yarıekseni a'ya eşit olarak alabiliriz. Bu uzaklık $a = 1{,}5 \times 10^8\ km \equiv 1$ astronomi birimi (a.b.).

Neptün Güneş etrafındaki yörüngesini 165 yılda tamamlıyor. Kepler'in Üçüncü Kanununu kullanarak Neptün'ün yörüngesinin büyük yarıekseni a_N 'yi a.b. ve km olarak bulun.

$27000 = 30^3$ – bunu kullanarak yaklaşık hesap yapabilirsiniz, hesap makinasına ihtiyacınız yok.

40. (a) A ve B cismlerinin zamana karşı konum grafikleri Şekil 15.25(a)'da görülüyor. Hangisinin sürati daha fazla? Kısaca açıklayın.



Şekil 15.25

(b) Bir cisim, bir ipin ucunda gitgide azalan bir süratle aşağıya indiriliyor. Cismin üzerinde ağırlığı (mg) ve ipteki gerilim T olmak üzere iki kuvvet var (Şekil 15.25(b)). Bu kuvvetlerden hangisi daha büyük? Neden?

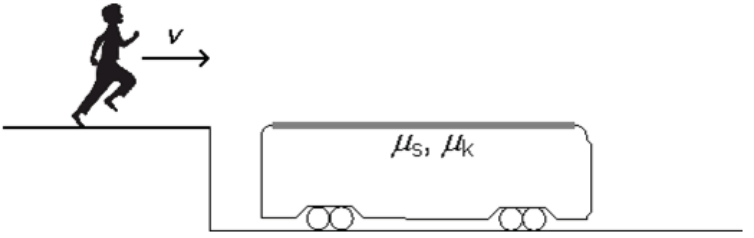
(c) Genellikle normal kuvvet ne kadar büyükse hareket eden cisimle yüzey arasındaki sürtünme kuvveti de o ölçüde (normal kuvvete orantılı olarak) büyüktür. Neden?

(d) Kütlesi m ve hızı v olan bir A cismi, sürtünmesiz yatay bir yüzey üzerinde tam karşı yönde hareket etmekte olan $2m$ kütleli B cismiyle kafa kafaya çarpışıyor (Şekil 15.25(c)). Çarpışmanın ardından her iki cismin durabilmesi için B'nin ilk hızı ne kadar olmalı?

(e) Bir çocuk salıncakta P periyoduyla sallanmaktayken ikinci bir çocuk aynı salıncağa biniyor. Salıncaktaki ağrılık böylece iki katına çıkıyor. Periyoda ne oluyor?

41. 40 kg kütleli bir çocuk 3 m/s sabit hızla koşarken başlangıçta durmakta olan 120 kg kütleli bir vagona atlıyor (Şekil 15.26). Vagonun üstü sürtünmeli bir yüzey. Bu yüzeyde çocuk ile vagon arasındaki sürtünme katsayıları $\mu_{\text{statik}} = 0{,}4$

ve $\mu_{\text{kinetik}} = 0{,}3$. Vagonun kendisi ise sürtünmesiz bir yüzey üzerinde kayıyor. Çocuk vagonun üstünde bir süre hareket ettikten sonra duruyor. Bundan sonra çocuk ve vagon birlikte hareket ediyorlar. $g = 10$ m/s^2 alın.



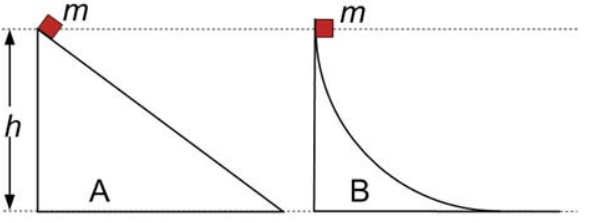
Şekil 15.26

(a) Çocuk vagonun üstünde hareket ederken çocuğun üstünde etki yapan sürtünme kuvvetinin büyüklüğü ne kadardır? Bu kuvvet hangi yöndedir?

(b) Çocuğun vagon üzerinde hareketinin durması ne kadar zaman alır?

(c) En sonunda çocuk ve vagonun yere göre hızı ne kadardır?

42. Birbirinin aynı, her biri m kütleli iki cisim, Şekil 15.27'de gösterilen aynı yükseklikteki iki farklı sürtünmesiz yüzeyin tepesinde dururken bırakılıyorlar. Yatay yüzeye kavuştukları anda hangisinin sürati daha yüksektir? Kısaca açıklayın.

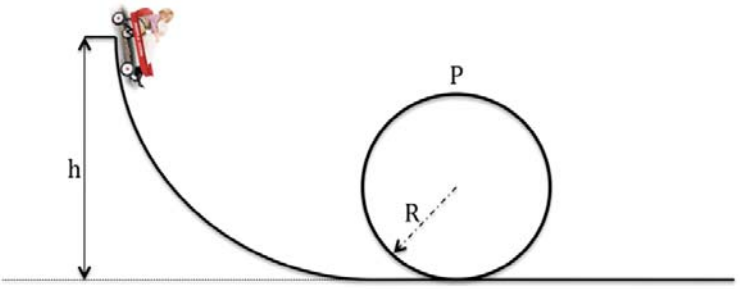


Şekil 15.27

43. Lunaparktaki inişli çıkışlı hız treninde kütlesi m kadar olan bir vagon Şekil 15.28'de görüldüğü gibi h yüksekliğinden bırakılıyor. İlk hızı sıfır. Bir süre sonra vagon, yarıçapı R olan daireyi izliyor.

(a) Vagonun, şekilde P ile gösterilen dairenin tepe noktasında bulunduğu andaki serbest cisim diyagramını çizin.

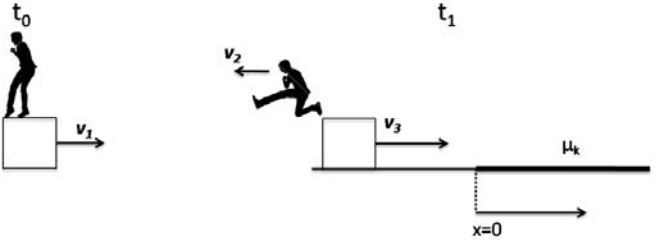
(b) Vagonun P tepe noktasından geçerken dairesel yol üzerinde kalabilmesi için gereken en düşük sürati R ve g cinsinden bulun.



Şekil 15.28

(c) Vagonun yoldan kopmaması için başlangıçtaki yükseklik h en az ne kadar olmalıdır?

44. Kütlesi 80 kg olan bir adam 120 kg kütleli bir sandığın üzerinde duruyor (Şekil 15.29). t_0 ânında, sandık ve adam birlikte 2 m/s hızla $+x$ yönünde hareket etmekteler. Sürtünme yok. Daha sonra, t_1 ânında adam sandıktan ters yönde ($-x$ yönünde) 1 m/s süratle atlıyor. $g = 10$ m/s^2 alın.



Şekil 15.29

(a) Sandığın $t = t_1$ ânında, adam atladıktan hemen sonra, hızı nedir?

(b) Sandığın $t = t_1$ ânında kinetik enerjisi ne kadardır?

(c) Bir süre sonra sandık yolun sürtünmeli kısmına giriyor. Burada kinetik sürtünme katsayısı $\mu_k = 0{,}1$. Sürtünme kuvvetini hesaplayın.

(d) Sandık $x = 0$ konumunda duruncaya kadar kaç metre gider?

45. Kütlesi 9 kg olan bir cisim sürtünmesiz yatay bir yüzey üzerinde bir yaya bağlı olarak basit harmonik hareket yapmakta (Şekil 15.24). Yay, Hooke Kanununa uyan bir kuvvet uyguluyor. Cismin konumu zamana bağlı olarak: $x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ şeklinde değişiyor. Burada $x = 0$ denge konumu, A ve B değerleri hareketin ilk şartlarıyla belirlenen sabitler, $\omega = \sqrt{k/m}$ ise açısal

frekans.

(a) "Yay sabiti" $k = 16$ N/m'dir. ω'yı bulun.

(b) Salınımın periyodunu bulun. Açısal frekans $\omega = 2\pi f$ şeklinde saniyedeki salınım sayısını veren f frekansına bağlıdır.

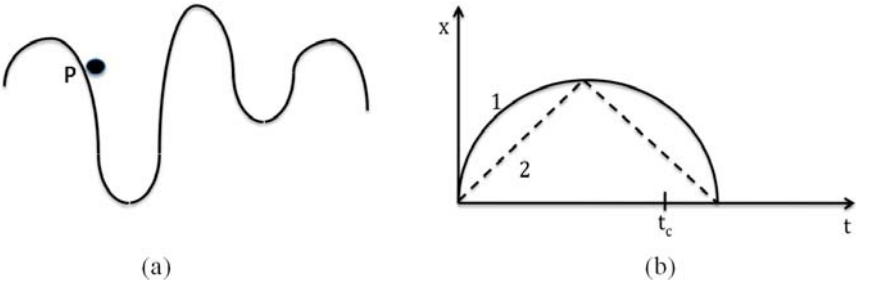
(c) Zamana bağlı olarak hız $v(t)$'yi, içinde A ve B sabitlerinin bulunduğu bir formülle ifade edin.

(d) $t = 0$ anında yay çekilmiş durumda ve ucundaki cisim 2 m konumunda dururken bırakılmış. Bu ilk şartlara göre A ve B'nin değerlerini bulun.

(e) Kinetik ve potansiyel enerjinin değerlerini zamana bağlı olarak bulun.

(f) Kütle denge noktasından geçerken hızın değer(ler)ini bulun.

46. (a) Küçük bir kütle Şekil 15.30(a)'da görülen potansiyel enerji (arazi) kesitinde P noktasından bırakılıyor. Kararlı ve kararsız denge noktalarını işaretleyin. Sürtünme yoksa bu kütle nasıl bir hareket izleyecek?



Şekil 15.30

(b) Şekil 15.30(b)'de düz bir çizgi üzerinde koşan iki atletin konumlarının zamana karşı grafiğini görüyorsunuz. Sürekli çizgi birinci atletin, kesikli çizgi ise ikinci atletin koşusunu anlatıyor. Bu grafiğe göre,

i. Birinci atlet koşusunun ilk yarısında hızlanıyor mu, yavaşlıyor mu yoksa sabit hızla mı gidiyor? Neden?

ii. İkinci atlet koşusunun ilk yarısında hızlanıyor mu, yavaşlıyor mu yoksa sabit hızla mı gidiyor? Neden?

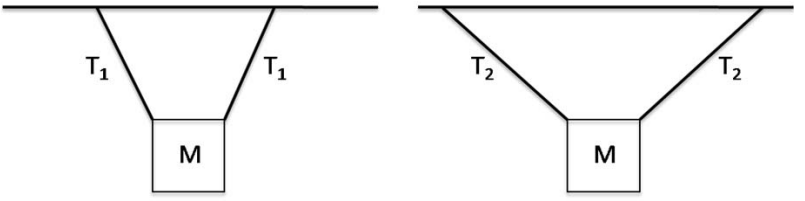
iii. Zaman $t = t_c$'de hangi atlet daha çok yol almış durumda?

iv. Zaman $t = t_c$'de hangi atlet daha hızlı?

(c) Kütleleri aynı olan A ve B uyduları Dünya etrafında yörüngelerde hareket halindeler. B uydusunun Dünya'nın merkezinden uzaklığı A uydusununkinin iki katı. Bu uyduların teğetsel süratlerinin birbirine oranı nedir?

(d) 1 kg kütleli bir taşı 10 m yükseklikten toprağa düşmeye bırakıyorsunuz. Taşın Dünya'ya uyguladığı ortalama kuvveti bulabilir misiniz? Cevabınız "evet" ise ortalama kuvveti hesaplayın. Cevabınız "hayır" ise, neden hesaplayamayacağınızı ve başka hangi bilgilere ihtiyacınız olduğunu yazın.

(e) M kütlesinde bir kutu iki yanından eşit gerilim taşıyan iplerle Şekil 15.31'de görüldüğü gibi asılıyor. Şekilde gösterilen iki farklı durum için serbest cisim diyagramlarını çiziniz. Hangi durumda iplerdeki gerilim daha az? Neden?



Şekil 15.31

16
Basınç — Hacim — Sıcaklık: İdeal Gaz

Bu bölümde *seyrek* bir gazın basıncı, hacmi ve sıcaklığı arasındaki ilişkiyi bulacağız. Böyle bir gazda atomlar* birbirlerine ve gazın içinde bulunduğu kabın duvarlarına çarpar. Bu kaba "kutu" diyoruz ve küp olarak gösteriyoruz, ama kutunun nasıl bir şekli olduğu aslında önemli değil. Gaz atomlarının kutunun içinde kapladığı toplam hacim, kutunun hacmine kıyasla çok çok küçük. Atomlar arasındaki ortalama mesafe, atomların büyüklüğünden çok çok daha büyük. Seyrek gaz diyerek bunu kastediyoruz. Ayrıca, atomlar arasındaki etkileşimin potansiyel enerjisinin de, kinetik enerjisine kıyasla yok sayılabilir düzeyde olduğunu kabul ediyoruz. Burada dikkate alınması gereken atomlararası ya da moleküllerarası kuvvetler yok. Seyrek gazlarda çok iyi bir varsayım bu, çünkü elektronları atomlara bağlayan ve moleküllerin içinde atomları birlikte tutan temel etkileşim olan elektrostatik Coulomb etkileşimi *perdelenmiş* oluyor. Atomlarda ve moleküler bağlardaki elektron dağılımı, pozitif yüklü çekirdeklerin uyguladığı yalın Coulomb kuvvetini perdeliyor. Perdelemeden, yani pozitif ve negatif yüklerin etkilerinin birbirini götürmesinden dolayı, nötr bir atomun ya da molekülün diğer atomlar ve moleküller üzerinde uyguladığı toplam kuvvet çok ama çok zayıf. Üstelik, bu çok zayıf toplam kuvvetin erimi de çok kısa, ancak atom veya moleküllerin büyüklüğü düzeyinde. Bir atom başka bir atoma nadiren görülebilecek bir kafa kafaya çarpışmadaki gibi çok fazla yaklaşmadıkça, atom üzerinde hissedilir bir kuvvet olmayacak, burada etkin hiçbir etkileşim yok. Son olarak, atomlar arasında ya da atomlarla kutunun duvarları arasındaki çarpışmaları *esnek* kabul ediyoruz. Bu, çarpışma sırasında toplam kinetik enerjiden hiç enerji eksilmiyor demek. En yakın çarpışmalarda bile, gerçekleşen çok zayıf etkileşim, atomun, onu uyarılmış duruma getirecek olan iç enerjisine dönüşmüyor. Bütün bu varsayımlar seyrek bir gaz için geçerli. Seyrek gazın sadece kinetik enerjisi var. İşte böyle bir gaza,

---

* Veya moleküller: Burada gazın içindeki parçacıklara "atomlar" diyerek atomları veya molekülleri kastediyoruz; atom ile molekül arasındaki ayrımın önemli olduğu yerler hariç.

"ideal gaz" deniyor. İdeal gaz modeli *basit* bir model; daha önemlisi, doğada ve teknolojideki pek çok durum için, mesela yıldızların veya makinaların içindeki gazlar için *gerçekçi* bir model. Atomların arasındaki mesafenin atom büyüklüğünden çok da fazla olmadığı yoğun bir gaz, ideal gaz değildir. Yoğunluk arttıkça, böyle bir gaz mikroskobik olarak bir sıvıdan ya da amorf bir katıdan ya da camdan pek farklı olmaz; bu sistemlerin hepsi de güçlü etkileşimlerin olduğu sistemlerdir. Yoğun bir gaz, bir sıvı ve amorf bir katı arasındaki farklar viskozite gibi özelliklerle ilişkilidir.

Soru

İyonize bir seyrek gaz (seyrek bir plazma) ideal değildir. Neden?

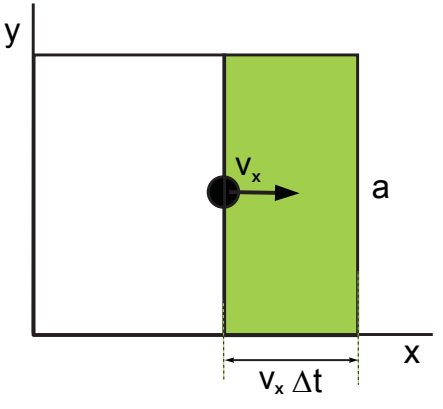
Newton'un İkinci Kanununu şöyle yazıyoruz:

$$\mathbf{f} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t} \tag{16.1}$$

Burada **f**, Δt zaman aralığı boyunca bir atoma etki eden ortalama kuvvet, m atomun kütlesi, **v** bunun hızı ve t de zaman. Şimdi sadece hareketin x bileşenini ele alalım. Diyelim bir atomun sağa doğru v_x hızı olsun, atom gidip küpün sağ duvarına vuruyor, oradan da $-v_x$ hızıyla sekiyor, zira çarpışma sırasında atomun kinetik enerjisi değişmiyor. Momentumdaki değişme (*etki*):

$$\Delta(m\mathbf{v}) = 2mv_x \tag{16.2}$$

Şekil 16.1'te görülen kutunun x-y izdüşümünü ele alalım. Kutunun her kenarı a



Şekil 16.1

uzunluğunda. Bu resimde, v_x hızıyla sağa doğru hareket eden bir gaz molekülü görüyoruz. Moleküllerin farklı hızları olacak. Bu hızların yönlerinin yanı sıra büyüklükleri de birbirinden farklı olacak. Ama şimdilik hepsinin pozitif veya negatif x ekseni yönünde aynı v_x hız bileşenine sahip olduğunu düşünelim. (Moleküllerin hızlarının farklı olduğunu biraz sonra dikkate alacağız.) Bu hızla hareket eden bir molekül Δt süresinde $v_x\Delta t$ mesafesini kat edecek. Taranmış olan $a^2v_x\Delta t$ hacmindeki bütün moleküllerin *yarısı* sağa doğru gidiyor. Bu moleküller Δt zaman aralığı içinde kutunun sağ yanına vuracak. Kutudaki toplam parçacık sayısı N olsun. Moleküller kutunun içinde rasgele dağılmış olduğuna göre, Δt zaman aralığı içinde sağ duvara çarpacak

$$\frac{(1/2)a^2v_x\Delta t}{a^3}\ N\ = (1/2)a^2v_x\Delta t\frac{N}{V} \tag{16.3}$$

tane molekül var. Burada $V = a^3$, kutunun hacmi. Her molekül kutunun sağ duvarına

$$\mathbf{f} = \frac{\Delta(mv_x)}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\Delta t} \tag{16.4}$$

kadar kuvvet uyguluyor. Toplam kuvvet

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{2mv_x}{\Delta t}\right)a^2v_x\Delta t\frac{N}{V}$$

$$F = a^2mv_x^2\frac{N}{V}\,. \tag{16.5}$$

Birim alan başına kuvvet, F/a^2, *basınç, P* 'dir.

> SI basınç birimi, N/m²'ye (Newton/metrekare), 17. yüzyılda yaşamış Fransız filozof, matematikçi ve bilim insanı Blaise Pascal'ın şerefine *Pascal*, kısaca *Pa* adı verilmiş. Sık kullanılan bir diğer basınç birimi de, deniz seviyesinde Dünya'nın atmosferinin ortalama basıncını temel alan *atmosfer*, kısaca *atm*. 1 *atm* = 1,013 × 10^5*Pa*.

Böylece elimizde şu ilişki var:

$$P = mv_x^2\frac{N}{V} \tag{16.6}$$

Bu, basınç P , yoğunluk $n \equiv N/V$ ve molekülün kinetik enerjisiyle ilgili bir şey arasındaki bir ilişki.

Şimdi, aslında bütün moleküllerin hızı aynı değil, hem hepsi aynı yönde hareket de etmiyorlar. Buradaki v_x^2 terimi, moleküllerin x hızının karesinin ortalamasını gösteriyor.

Soru

"hızın karesinin ortalaması" ile "ortalama hızın karesi" aynı şey mi? Gazdaki ortalama *x* hızı ne?

Toplam hızın karesi, hızın *x*, *y*, ve *z* bileşenlerinin karelerinin toplamı;

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \tag{16.7}$$

Moleküllerin hız bileşenleri molekülden moleküle farklı tabii ki, hepsi aynı olmadığı için ortalama almamız gerekiyor. Ortalama alma işlemi, açılı parantezle gösteriliyor: ⟨⟩. Hız bileşenlerinin karelerinin ortalama değerleri arasında şu basit ilişki var:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \tag{16.8}$$

Fakat moleküller *x*, *y* ve *z* yönleri arasındaki ayrımı bilmiyorlar. Hareketin tercih ettiği bir yön yok. Öyleyse farklı yönlerdeki hız bileşenlerinin karelerinin ortalama değerleri $\langle v_x^2 \rangle$, $\langle v_y^2 \rangle$ ve $\langle v_z^2 \rangle$ eşit olmalı, öyle ki,

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \tag{16.9}$$

Denklem (16.9)'u basınç denklemi (16.6)'da yerine koyunca şunu elde ediyoruz:

$$P = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle \frac{N}{V} \tag{16.10}$$

Moleküllerin ortalama kinetik enerjisi $\frac{1}{2}\, m\, (v^2)$. O zaman basınç şöyle yazılabilir:

$$P = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right) \frac{N}{V} \equiv \frac{2}{3} \frac{U}{V} \equiv \frac{2}{3}\, u \tag{16.11}$$

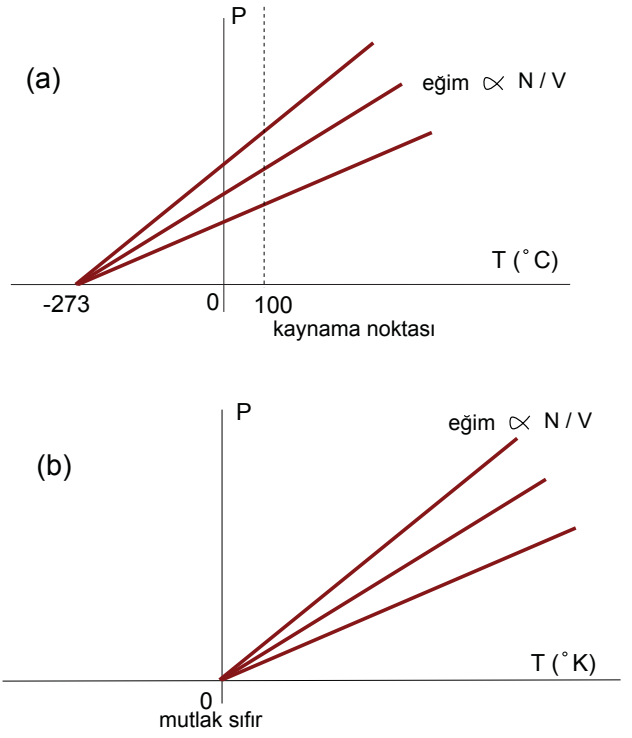
Buradaki yeni terimlerden *U*, *gazın toplam "iç" enerjisi*, *u* ise *enerji yoğunluğu*, yani gazın bir birim hacmindeki bütün moleküllerin enerjisidir. Şimdi Denklem (16.10)'a dönelim. Denklem (16.10)'u şu şekilde yazabiliriz:

$$PV = N(\frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle) \tag{16.12}$$

Bu şimdiden **ideal gaz kanununa** benziyor, *P*, *V*, *N* ve *sıcaklık T* arasındaki, ilk olarak 17. yüzyılda Boyle, Charles ve diğerleri tarafından ampirik yoldan saptanan ilişkiye:

$$\boxed{PV = Nk_BT.} \tag{16.13}$$

Aradaki tek fark, bizim denklemimizin (Denklem 16.12) sıcaklık T'den bahsetmemesi. Bunun yerine atom başına ortalama kinetik enerjiyi kapsıyor. Basınç P ve yoğunluk $n = N/V$ arasındaki orantı ("Charles Kanunu"), Denklem 16.10 ile elimizde zaten var. Kutudaki basınç P, hacim V ve atom sayısı N (ya da kütle, ya da gazın mol sayısı), bunların hepsi pozitif nicelikler. Öyleyse sıcaklık T de doğru tanımla (*"mutlak"* ölçüde) pozitif olmak durumunda. Sahiden de, sabit bir gaz oranı için, mesela sabit $n = N/V$ için P ile sıcaklık T arasındaki, ampirik olarak ölçülmüş ilişki, T'nin *Celsius* derecesinden gösterildiği Şekil 16.2 (a)'daki gibi.



Şekil 16.2

Santigrat (◦*C*) da denen bu sıcaklık ölçüsü, suyun donma noktasını ("standart" atmosfer basıncı altında) 0 derece, kaynama noktasını da 100 derece diye tanımlayarak yapılmış. Bunu 273 derece kaydırarak elde edilen *Kelvin* (*K*) sıcaklık ölçüsü ile;

$$T\,(K) = T\,(\circ C) + 273, \tag{16.14}$$

elimizdeki ilişki alışılagelmiş haliyle ideal gaz kanununa dönüşüyor. Bunu Şekil 16.2 (b)'de görüyoruz.

İdeal gaz kanunu yalnız sıcaklık mutlak (Kelvin) ölçüyle gösterildiği zaman geçerli olur.

Şimdi Denklem (16.13) ideal gaz kanununu, türettiğimiz ilişkiyle, Denklem 16.12'yle karşılaştırın. Gazdaki atomların ortalama kinetik enerjisi negatif olamaz. Bunun en düşük değeri sıfırdır, tıpkı mutlak sıcaklık gibi. Böylece mutlak sıcaklık, ampirik olarak tanımlandığı gibi, atomların ortalama kinetik enerjisine tekabül eder:

$$k_B T(^\circ K) = \frac{1}{3} m \left\langle v^2 \right\rangle \tag{16.15}$$

Orantı sabiti k_B'nin, yani *Boltzmann sabitinin*, değeri $k_B \cong 1{,}38 \times 10^{-23} JK^{-1}$. Böylece ideal gaz kanununu temel mekanikten çıkardık ve gördük ki soğuk ve sıcak olarak algıladığımız şeyin ampirik ölçüsü olan sıcaklık aslında molekül başına düşen enerjinin bir ölçüsüdür.

Atomların ya da moleküllerin sayısı N , $N = n_{mol} \times N_{Avogadro}$ diye yazılabilir; burada n_{mol}, *mollerin* sayısı, Avogadro sayısı $N_{Avogadro} \cong 6{,}02 \times 10^{23}$ ise bir molde bulunan atomların (veya moleküllerin) sayısıdır.

Bu tanımlar üzerinde duralım biraz. Esas olan elimizdeki toplam atom veya molekül sayısı N. Avogadro sayısıysa bizim birim sistemimizle ilgili: Toplam kütlesi 1 gram olan hidrojen atomlarından oluşmuş gazda kaç tane hidrojen atomu var? İşte bu sayıya Avogadro sayısı diyoruz. Hidrojen atomunun kütlesi çok iyi bir yaklaşıklıkla 1 protonun kütlesine, proton kütlesi de yine iyi bir yaklaşıklıkla nötron kütlesine eşit. Bunları kullanarak yaklaşık bir proton veya nötron kütlesine eşit bir *atomik kütle birimini* $\equiv 1{,}6 \times 10^{-24}$ *g* olarak bulabiliriz. Her bir molekülü A kadar proton ve nötron içeren bir maddenin molekülleri A tane atomik kütle birimi içeriyor demektir. Basit orantı ile 1 *g* atomik hidrojen, Avogadro sayısı kadar her biri 1 atomik kütle birimlik atomdan oluşuyorsa, bizim konuştuğumuz maddenin de A gramı, her biri A atomik kütle birimlik Avogadro sayısı kadar molekülden oluşur. Bu maddenin Avogadro sayısında molekülünden oluşan miktarına, yani A gramına 1 *mol* denir. Mesela su (H_2O) moleküllerinde toplam 18 proton ve nötron, 18 atomik kütle birimi var. O zaman 18 *g* su, Avogadro sayısı kadar su molekülünden oluşur. Suyun 1 molü 18 *g* demek ki. Elimizde 360 *g* buhar olsa, bu gazda 20 mol su molekülü var, toplam olarak $N = 20 \times NA_{vogadro}$ tane su molekülü olur. Bu mol tanımıyla ideal gaz kanunu şu hali alıyor:

$$PV = n_{mol} N_{Avogadro} k_B\, T \equiv n_{mol} RT \tag{16.16}$$

Gaz sabiti $R = N_{Avogadro} k_B$'nın değeri 8,315 J /(mol K).

Dikkat ederseniz basınç ve sıcaklık, 3. Bölümde bahsettiğimiz oluşumlu kavramlardan. Bunlar makroskobik ideal gazda bulunan kinetik enerjinin ortalama değeri üzerinden tanımlanıyorlar. İdeal gaz kanununun çıkışı, tek tek mikroskobik parçacıklara uygulandığı haliyle Newton'un İkinci Kanununa dayanıyor; fakat basınç, sıcaklık ve yoğunluk ideal gazın özellikleri. Basınç, sıcaklık ve yoğunluğun ve bunların sağladıkları ideal gaz bağıntısının mikroskobik parçalar için hiçbir anlamı yok.

PROBLEMLER

1. 1 m^3 hacimli bir kutunun içinde 1 mol buhar, yani Avogadro sayısı $\cong 6{,}02 \times 10^{23}$ kadar su molekülü var.
   (a) m^3'e düşen molekül sayısı, yani sayı yoğunluğu n kaçtır?
   (b) Birbirine komşu moleküller arasındaki ortalama mesafe ne kadardır? Bunu atomların ve küçük moleküllerin tipik büyüklüğü olan 10^{-10} m ile karşılaştırın. Bu seyrek bir gaz mı?

2. Atmosfer basıncının kaynağı nedir? Deniz seviyesinde 1 m^2 alanın üzerindeki Dünya atmosferi sütununun toplam kütlesi ne kadar? Dünya'nın yüzeyinde kütleçekimi ivmesi g'nin, atmosfer kalınlığının her tarafı için aynı olduğunu farz edin.

3. 1 m^3 hacmindeki bir kutunun içinde, 27°C sıcaklıkta ve 1 *atm* basınçta hava var. Havadaki moleküllerin %80'inin N_2 (azot), %20'sinin de O_2 (oksijen) molekülü olduğunu farz edin.
   (a) Azot ve oksijen molekülleri aynı sıcaklıkta mı? Neden?
   (b) Bu kutuda kaç tane molekül var?
   (c) Oksijen moleküllerinin yoğunluğu ne kadar?
   (d) Azot moleküllerinin yoğunluğu ne kadar?
   (e) Basıncın ne kadarı oksijenden, ne kadarı azottan kaynaklanıyor? Bunlara *"kısmi basınç"* denir.

4. (a) Havadaki O_2 moleküllerinin 27°C sıcaklıktaki *"kök ortalama kare"* (≡ *"hız karesinin ortalama değerinin kökü"*) süratleri ne kadardır? Aynı sıcaklıkta havadaki N_2 moleküllerinin kök ortalama kare süratleri ne kadardır?
   (b) İçinde farklı farklı moleküller olan bir ideal gazda her molekül türünün kök ortalama kare sürati, molekülün kütlesine nasıl bağlıdır?

5. Hareketli bir pistonu olan bir kabın içinde, 20°*C* sıcaklıkta, 1 *litre* hacminde ve $1{,}8 \times 10^5$ *Pa* basınçta ideal gaz var.

   (a) Kaptaki gazın mol sayısını bulun.

   (a) Gazın pistonu itmesi sonucu hacim iki katına çıkıyor, basınç ise atmosfer basıncına ($1{,}0 \times 10^5$ *Pa*) düşüyor. Son sıcaklık nedir?

17
Entropi ve Termodinamik Yasaları

17.1 KUTUDAKİ GAZ

Bir kutunun içinde N tane molekülden oluşan ideal bir gazı düşünelim. Kutuyu tam ortadan hayalî bir perdeyle eşit, tamamen birbirinin aynı iki yarım kutuya ayrılmış olarak düşünelim. Kutudaki N tane molekülden kaçı soldaki yarım hacimdedir, kaçı sağ yarıdadır? Hemen moleküllerin yarısı solda yarısı sağdadır diye tahmin edebiliriz. Tabii, mikrosokobik olarak, ideal gazı incelerken gördüğümüz gibi moleküller sürekli hareket halinde. Her molekül arada bir duvarlara çarpıp yansıyor, yön değiştiriyor ve hareket sırasında kutunun sağ yarısından sol yarısına ya da sol yarısından sağ yarısına geçebiliyor. Hangi moleküller sağda hangileri solda, bu her an değişiyor, ama moleküllerin yarısı sol tarafta yarısı da kutunun sağ yarısında olacak büyük olasılıkla. Bazen, anlık olarak, bir yanda yarıdan az sayıda öteki yanda yarıdan fazla sayıda molekül bulunabilir tabii.

Ortadaki perdenin, molekülleri bir yandan öbür yana geçirmeyen sahici bir perde olduğunu düşünelim. Moleküllerin tümünü mesela sol yanda toplayalım. Sağ yan başlangıçta bomboş olsun. Şimdi perdede bir delik açalım, yolu bu deliğe denk gelen moleküller sağa geçmeye başlayacaklar. Kısa bir süre sonra yine moleküllerin yarısı sağ yanda olur, yarısı solda. Deliği kullanarak her zaman kimi moleküller sağdan sola kimi de soldan sağa geçecekler. Ama orada delik olduğu sürece, durum hiç perde yokken olduğu gibi: Moleküller kutunun iki yarısı arasında birinden diğerine gidip gelebiliyorsa sol yarıda $N/2$ tane sağ yarıda da $N/2$ tane molekül olmasını bekleriz. Sürekli olarak bazı moleküller sağdan sola bazıları da soldan sağa geçiyor olacaklar. Her saniyede soldan sağa geçenlerle sağdan sola geçenlerin sayısı herhalde aynı olmalı çünkü kutunun iki yarısı tamamen aynı hacimde ve aynı özelliklere sahip. Delik de iki yönde de aynı ölçüde geçirgen, mesela sağdan sola geçişlere izin verip soldan sağa geçişte zorluk çıkaran bir yapı yok. Bu durumda kendiliğinden bütün moleküllerin, N tane molekülün hepsinin sol yarıda toplanıp sağ yarıda bir an için olsa bile hiç molekül kalmaması, gazın tümünün bir yarıya toplanıvermesi gibi bir durum hiç ortaya çıkmaz. Kutunun

iki yarısı arasında moleküllerin yarı yarıya paylaşıldığı durumlar bir denge durumu: Sistem bu duruma kendiliğinden ulaşıyor, ve bir kez bu duruma ulaştıktan sonra bir daha bu durumdan kendiliğinden çıkmıyor. Çok sayıda parçadan oluşan sistemlerin büyük olasılıkla ulaşıp bir daha da kendiliğinden uzaklaşamadıkları durumlara "*termodinamik denge*" deniyor. Kutunun iki yarısında eşit sayıda molekül olması ya da bir bardak suya damlatılan bir damla mürekkebin bir süre sonra bardağın her tarafına dağılmış olduğu durum termodinamik denge durumları. Termodinamik dengeye ulaştıran süreçler hep gerçekleşiyor ama bunların ters yönde işleyişi, mesela gazın tümünün kendiliğinden kutunun bir yarısına doluşması ya da bir bardak suda dağılmış bir damla mürekkebin tekrar toplanıp tek bir damla oluşturması görülmüş şey değil. Termodinamik dengeye ulaşma süreçleri tek yönlü, "*tersinemeyen*" süreçler.

Bütün bu gözlemler sistemin "*makroskobik*" durumuyla, kutunun her yarısında kaç molekül bulunduğuyla ilgili. "*Mikroskobik*" durumla, yani hangi moleküllerin nerede olduğuyla ilgili bilgimiz yok. Zaten ideal gazın ya da herhangi bir makroskobik (çok büyük sayıda parçacıktan oluşan) sistemin toplu özellikleri açısından mikroskobik ayrıntılar önemli de değil. Her makroskobik durum, çok büyük sayıda birbirine eşdeğer mikroskobik duruma karşılık geliyor. N tane molekülden hangi $N/2$ tanesinin sol yarıda olduğunu seçmenin çok çok büyük sayıda yolu var.

17.2 KAÇI SAĞDA KAÇI SOLDA?

N tane molekülden j tanesinin sol yarım kutuda, $N - j$ tanesinin sağ yarım kutuda bulunmasının kaç yolu vardır? Hangi j adet molekülün sol tarafa geçtiği ve bunların hangi sırayla sol tarafa geçmiş bulunduğu önemli olmadığına göre, bu seçimin

$$\Omega(j\,;N) \equiv \binom{N}{j} = \frac{N!}{j!\,(N-j)!} \tag{17.1}$$

tane farklı yolu vardır; burada $N!$ ("N faktöryel") N'den 1'e kadar tam sayıların çarpımı demek; $N! \equiv N\,(N-1)(N-2)... \times 3 \times 2 \times 1$. Basit bir örnek düşünelim. Mesela $N = 6$ tane molekülümüz olsun veya 6 tane top. Bunlardan $j = 2$ tanesinin sol tarafta olmasının kaç yolu var? 6 topumuzu 1, 2, 3, 4, 5, 6 olarak etiketleyelim, bir torbaya koyalım. Torbadan rasgele iki top çekelim, bu iki topu sol kutuya koyalım. Bu çekilişin sonuçları (1, 2) veya (1, 3), ... veya (1, 6) veya (2, 1) veya (2, 3), ... veya (2, 6), ... veya (6, 1) veya (6, 2) ... veya (6, 5) olabilir. İlk çekilişte 6 toptan her biri çıkabilir, ikinci çekilişte ise geri kalan 5 toptan her biri. İki top çekince çıkabilecek $6 \times 5 = 30$ sonuç var. Ama bunların bazıları aynı topların sol kutuda olacağını söyleyen aynı sonuçlar, mesela çekiliş sonucu sırasıyla (2, 6) veya (6, 2)

ise aynı iki top, 2 ve 6 etiketli toplar sol kutuda. Hangi sırayla sol kutuya geldikleri önemli olmadığına göre sol kutuda herhangi top ikilisinin mesela 1 ve 6, ya da 2 ve 6 ya da 5 ve 6 etiketli topları bulmanın, top çiftlerini seçmenin,

$$\frac{6 \times 5}{2} = 15 = \frac{6!}{2!\,(4)!} = \binom{6}{2}$$

yolu var. Sol kutuya 2 top seçilince kalan 4 top da sağ kutuya gidecek. Tabii 4 topu seçip sol kutuya koymak da kalan 2 topu seçip sağ kutuya koymakla aynı şey ve bunları gerçekleştirmenin aynı sayıda yolu var:

$$\binom{N}{j} = \frac{N!}{j!\,(N-j)!} = \binom{N}{N-j}$$

Her top için iki seçenek var, kutunun ya sol yarısında olacak ya da sağ. Demek ki bütün topları 2 yarıya bölüştürmenin $2^6 = 64$ yolu var. Bütün toplar sağda, solda 1 top, 2 top, ..., 5 top var ve "bütün toplar solda" seçenek sayılarının toplamı 64 olmalı. Genellersek,

$$\sum \binom{N}{j} = 2^N$$

Topların sağ veya sol yarım kutuya rasgele dağıldıkları tüm durumlar arasında sol yarıda *j* tane top bulunmasının oranı ya da olasılığı da

$$P(j\,;N) \equiv= \frac{\Omega(j\,;N)}{\sum \Omega(j\,;N)} = \frac{\binom{N}{j}}{2^N}$$

olur.

Mesela 6 toptan sol tarafta $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ veya 6 tanesinin bulunmasının yollarını ve olasılıklarını hesaplayalım. Tabii en yüksek olasılık topların yarısının, 3 tanesinin sol yarım kutuda, yarısının da sağ yarım kutuda olması, en az olasılık da topların tamamının bir yarım kutuda toplanması. Şimdi bu hesabı 10 top, 100 top, 1000 top için yaparsanız göreceksiniz ki top sayısı arttıkça iki yarım kutuda eşit sayıda $N/2$ top olması durumu, tabii hep en yüksek olasılıklı durum, diğer bütün durumlardan çok daha büyük olasılıkla gerçekleşiyor, hele bütün topların solda veya sağda toplanması durumu neredeyse hiç olmayacak kadar düşük olasılık taşıyor. Şekil 17.1'de $N = 6$, $N = 20$, $N = 100$ ve $N = 1000$ için $\binom{N}{N-j}$ değerleri gösteriliyor. En olası duruma, topların yarısının sağda yarısının solda olduğu duruma ulaşma yollarının sayısı $\binom{N}{N/2}$, top sayısı N arttıkça diğer durumlara göre gitgide daha baskın, çok çok çok baskın çıkıyor.

Şimdi gazımıza dönelim. Bir gazın içinde bulunan molekül sayısı Avogadro sayısı mertebesinde çok büyük bir sayı, $N \sim 10^{24}$. Bu kadar çok sayıda molekülü

kutunun iki yarısına dağıtma yolları $\Omega(j\ ;N)$ devasa büyük sayılar. Bu sayılar yerine logaritmalarını alırsak daha küçük sayılarla çalışabiliriz. Logaritmanın başka bir yararı da var. Moleküllerden j tanesinin sol yarım kutuda olması ve k tanesinin de soldan sağa doğru hareket ediyor olmasının olasılığı bu iki durumun olasılıklarının çarpımıdır. Durum sayılarının ve olasılıkların logaritmalarını alırsak olasılıkların çarpılması logaritmalarının toplanması demektir. Durum sayılarının veya olasılıkların logaritmaları tıpkı parçacık sayısı, hacim, enerji gibi "*toplanabilir*" niceliklerdir.

Makroskobik sistemler için önemli bir kavram olan durum sayısının logaritmasının, termodinamikte karşımıza çıkan "entropi" kavramına ilişkin olduğunu ilk kez, 19. yüzyılın büyük teorik fizikçilerinden Ludwig Boltzmann anlamış. Boltzmann, toplanabilir bir özellik olan durum sayısının logaritmasının, yine toplanabilir bir özellik olan enerji ile aynı boyutlara ve birimlere sahip olması için, ideal gaz yasasında gördüğümüz Boltzmann sabiti k_B'yi de işin içine katarak bir entropi (S) tanımı yapmış. Biraz sonra bu tanımın anlamını ve termodinamiğin ikinci kanununu ele alacağız. Bu aşamada Boltzmann'ın entropi tanımını yazalım:

$$S \equiv k_B\ ln\ \Omega \tag{17.2}$$

Şimdi bu tanıma göre, kutudaki N molekülün yarısının sol, yarısının da sağ yarım kutuda bulunduğu durum için entropiyi hesaplayalım. Bunu yaparken büyük sayıların faktöryelleri için çok iyi bir yaklaşıklık sağlayan Stirling formülünü kullanacağız:

$$ln\ (N!) \cong N\ ln\ N - N \tag{17.3}$$

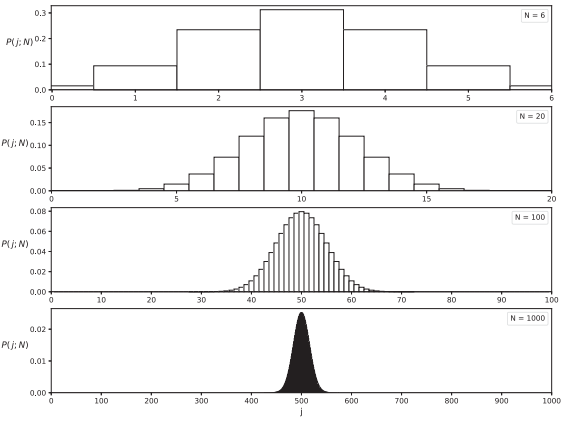
Elde ettiğimiz sonuç

$$S(N/2\ ;N) = k_B\ ln\ [\binom{N}{N/2}] \cong k_B\ N\ ln\ 2 \tag{17.4}$$

Şekil 17.1'de $N = 1000$ top için bile en olası (maksimum entropili) durumun, diğerlerinden çok daha fazla olasılık taşıdığını görmüştük. Hele molekül sayısı N Avogadro sayısı mertebesinde olduğunda, en olası durumdan başka bir durumun gerçekleşme ihtimali hiç yok.

17.3 TERMODİNAMİĞİN İKİNCİ KANUNU - MAKROSKOBİK SİSTEMLER EN OLASI DURUMA GİDER VE Ö YLE KALIR

Görüyoruz ki makroskobik ($N >>> 1$) sistemler için en olası durum, başka her durumdan çok çok çok daha yüksek bir olasılıkla gerçekleşecek. Bunun dışında-



Şekil 17.1

ki durumlar hiç görülemeyecek. Örneğimizde farklı bir halden başlarsak gazımız tüm moleküllerin kutunun iki yarısında eşit sayılarda bulunduğu duruma ulaşacak. Bunun tersi, yani moleküllerin daha büyük kısmının veya tamamının kendiliğinden bir yarım kutuya doluştuğu hiç görülmeyecek. Demek ki durum sayısı Ω ve entropi S her süreçte mutlaka artacak. Peki ya bu gaz, zaten moleküllerin yarısı sağda yarısı solda olan durumda ise ne olacak? O zaman bu durumdan başka bir duruma geçemeyecek sistemimiz. Herhangi bir molekül, sürekli olarak soldan sağa, sağdan sola geçebiliyor, yani sistemin mikroskobik durumu değişiyor. Ama makroskobik durum, moleküllerin yarısının sağda, yarısının solda olduğu, entropinin en yüksek değeri taşıdığı durum, sistemi kendi haline bırakırsanız kendiliğinden değişmeyecek. Demek ki, dışarıdan müdahale edilmeyen, *izole* bir sistem en olası duruma doğru değişir ve bu duruma varınca orada kalır:

$$\Delta S \geq 0. \tag{17.5}$$

Bu, termodinamiğin ikinci kanunudur.

$\Delta S = 0 \rightarrow$ sistem dengede $\rightarrow$ burada kaldıkça süreçler tersinebilir.
$\Delta S > 0 \rightarrow$ sistem dengeye doğru gitmekte $\rightarrow$ bu süreç tersinemez.

17.4 TERMODİNAMİĞİN BİRİNCİ KANUNU – ENERJİ KORUNUMU

Makroskopik sistemlerde ısı transferine, sistemin yaptığı veya sistem üzerinde yapılan iş ve enerji değişimlerine termodinamik süreçler deniyor. Mekanik yasalarını incelerken, kinetik enerjinin yapılan işle değiştiğini görmüştük. İdeal gazın toplam enerjisi, yani içindeki tüm moleküllerin toplam kinetik enerjisi, sistem üzerinde iş

yapılırsa ya da sistem, çevresi üzerinde iş yaparsa değişir. Herhangi bir değişim sürecinin her aşamasında yapılan küçük miktarlardaki iş dW olsun. Pistonlu sistemde gaz ve pistonun birbirleri üzerine yaptıkları iş:

$$dW_{gaz \to piston} = F_x dx = PAdx = PdV$$
$$dW_{piston \to gaz} = -PdV. \qquad (17.6)$$

Pistonun makroskobik hareketiyle ilgili işten başka, mikroskobik düzeyde, gaz moleküllerinin kutunun duvarlarındaki moleküllerle, onların da dışarısıyla yaptıkları sürekli küçük enerji alışverişleri var. Sistemin enerjisi bu mikroskobik kanaldan da değişebilir. Küçük miktarlarına dQ sembolünü kullanacağımız bu nicelik, *ısı transferidir*. Tıpkı iş gibi ısı da sistemin bir özelliği değil, alınıp verilen (transfer edilen) bir nicelik. "Sistemin kendisinin şu anda şu kadar ısısı var" gibi bir özelliği ölçülemiyor. "Sıcaklığı T şu kadardır," denebiliyor. Sıcaklık, sistemdeki moleküllerin ortalama enerjisidir ve sistemin bir özelliği olarak ölçülebilir. Günlük dilde karıştırılsa da, ısı transferi ve sıcaklık bilimde ayrı kavramlardır.

Mekanik enerjinin işle değiştiğinin kavranması, 19. yüzyılda mikroskobik enerji transferinin, yani ısının da hesaba katılmasıyla tamamlandı. Bir sistemin enerjisi ısı transferi ve yapılan makroskobik iş ile değişebilir. Enerji korunumunun bu ifadesi termodinamiğin birinci kanunudur:

$$dE = dQ - PdV \qquad (17.7)$$

17.5 ENTROPİ VE ISI TRANSFERİ: ENTROPİNİN TERMODİNAMİKTEKİ KARŞILIĞI

Entropiyi, sistemin belli bir makroskobik durumda iken mikroskobik olarak bu durumda bulunabileceği yolların sayısı olan Ω'nın logaritması olarak tanımladık. Şimdi fiziksel bir süreçle karşılaştırarak entropinin ölçülebilir özelliklerle ilgisini bulmaya çalışalım. Başlangıçta ideal gazın N molekülünün tamamı sol yarım kutuda olsun. Kutuyu ikiye bölen, sol ve sağ yarımları ayıran duvar, hareket edebilir bir piston olsun. Piston duvarlara iyice otursun, iyi mühürlenmiş olsun, moleküller pistonun kenarlarından dışarı kaçamasın. Başlangıçta kilitli olan pistonu serbest bırakalım. Gaz pistonu itecek ve sonunda beklediğimiz gibi N tane molekül her iki yarıya da eşit sayılarla dağılacak. Bu beklentinin nasıl gerçekleşeceğini inceleyelim şimdi. Bunun için, ideal gazımızın iş ve ısı transferi yoluyla çevresiyle girdiği enerji alışverişini izlemek lazım. Gazın çevresiyle duvarlar üzerinden ısı alışverişi serbest olsun. Kutuyu çok büyük ve sabit sıcaklıkta bir çevre sistemi içine koyalım (buna "ısı banyosu" denir), öyle ki kutudaki gazın sıcaklığı çevre sıcaklığı ile eşit ve sabit kalsın. Pistonu serbest bıraktığınız andan itibaren N tane molekül kutunun tamamına ulaşabilir oldu. Sürecin başlangıcındaki durum, yani moleküllerin tama-

mının sol yarım kutuda bulunduğu durum, bir tek şekilde gerçekleşir:

$$\Omega_{ilk} = \Omega(N\,;N) = 1 \tag{17.8}$$

$$S_{ilk} = k_B\, ln\, \Omega_{ilk} = 0 \tag{17.9}$$

Son durumda ise N molekül bütün kutuya yayılmış, moleküllerin yarısı sol yarısı sağ kutuda, sistem en olası durumda. Yukarda hesapladığımız gibi

$$S_{son} = k_B\, ln\, \Omega(N/2\,;N) = k_B\, ln\, [\binom{N}{N/2}] = k_B\, N\, ln\, 2 \tag{17.10}$$

Demek ki bu süreçte gazın entropisi

$$\Delta S = S_{son} - S_{ilk} = k_B\, N\, ln\, 2 \tag{17.11}$$

kadar artmış.

Şimdi süreci termodinamik açıdan inceleyelim. İdeal gazı incelerken öğrendiğimiz gibi gazın toplam enerjisi sıcaklığa orantılı:

$$E = \frac{3}{2}\, N\, k_B T \tag{17.12}$$

İncelediğimiz süreçte piston hareket ederken gazın içindeki molekül sayısı N ve sıcaklık T değişmediğine göre

$$\begin{aligned} dE &= 0, \\ dQ &= PdV\,; \end{aligned} \tag{17.13}$$

sürecin her adımında ısı transferi gazın pistonu iterken yaptığı işe eşit. Süreç boyunca sistemin kazandığı toplam ısı aktarımı da

$$\Delta Q = \int_{V/2}^{V} PdV' = N\, k_B T \int_{V/2}^{V} \frac{dV'}{V'} = N\, k_B T\, ln\, 2 \tag{17.14}$$

Bu hesabı yaparken ideal gazın hal denklemi $PV = Nk_BT$ ilişkisini kullandık. Isı kazancı ile entropideki artışı karşılaştırınca

$$\Delta Q = T\,\Delta S \tag{17.15}$$

sonucuna ulaşıyoruz. Bir örnek üzerinden gösterdiğimiz bu ilişki aslında her türlü termodinamik süreçte geçerli. Çok küçük değişiklik içeren süreçlerde de $dQ = TdS$ ilişkisi geçerli. Sistemin sıcaklığı T sabit olmasa da termodinamik sürecin her küçük adımındaki ısı transferi ile entropi değişimi o sıradaki sıcaklık değeri ile birbirine bağlı. Termodinamiğin birinci ve ikinci kanunları

$$dE = TdS - PdV \tag{17.16}$$

$$dS \geq 0 \tag{17.17}$$

şeklinde yazılabilir. Bu yasalar izole bir sistem için sistemin toplam özellikleri açısından geçerlidir. Sürecin herhangi bir safhasında sistemin bir kısmının entropisi azalıyor başka kısımlarının entropisi artıyor olabilir. Toplam entropi mutlaka artacaktır ya da sistem dengede ise toplam entropi artık değişmeyecektir. Çünkü sistem bütün olarak en olası duruma doğru evrimleşir, o duruma gelince de orada kalır. Termodinamiğin ikinci kanunu: $dS \geq 0$. Bunun farklı eşdeğer ifadelerinden çok yaygın bir tanesini 4. Problemde ele alacağız.

PROBLEMLER

1. $N = 6$, $N = 10$ ve $N = 20$ için $\binom{N}{N-j}$'leri bulun. Sonuçlar Şekil 17.1'deki histogramlarda görülüyor.

2. N molekülden yarısının sol yarım kutuda, yarısının da sağda bulunduğu en olası durumda entropinin Denklem 16.4'te verildiği gibi $S \cong k_B\, N\, ln\, 2$ olduğunu gösterin.

3. $N = 1000$ toptan, sol yarım kutuda $j = 0, 100, 200, \ldots, 900, 1000$ topun bulunduğu durumlarda Stirling yaklaşımını kullanarak durum sayısının logaritması $ln\, \Omega(j\, ;\, N)$ değerlerini hesaplayın.

4. Isı transferinin yönü: Dışarıya veya dışardan içeriye ısı transferi olmayan izole bir sistem düşünün. Sistemin iki parçasından T_1 sıcaklığında olan kısımdan dQ kadar ısı T_2 sıcaklığındaki diğer parçaya aktarılıyor. Termodinamiğin ikinci kanununa göre sistemin toplam entropisi artacaktır. Buradan çıkarak $T1 > T_2$ olması gerektiğini gösterin. Demek ki *ısı transferi her zaman daha sıcaktan daha soğuğa doğru olur.* Bu sonuç termodinamiğin ikinci kanununun eşdeğer ifadelerinden biridir.

18

Ek Sorular — Termodinamik

1. V hacimli endüstriyel bir fırın başlangıçta 27◦ C'de. Sıcaklığı 927◦ C'ye yükseltmek istiyoruz. Fırın hava geçirmez olmadığı için, içerideki basınç atmosfer basıncı $Patm$ ile aynı. $PatmV = NkT$ eşitliğine göre, sıcaklık T'yi yükseltmenin tek yolu moleküllerden bazılarını fırından dışarı çıkarmak.

   (a) İlk ve son sıcaklıkları Kelvin'e çevirin.

   (b) Dışarı çıkarılması gereken molekül sayısını başlangıçtaki sayı N cinsinden bulun.

   (c) $$\frac{v_{kok}(T = 927°C)}{v_{kok}(T = 27°C)}$$

   oranını hesaplayın. $v_{kök}$ "kök ortalama kare" sürati anlamına geliyor.

   (d) Fırındaki gazın toplam moleküler iç enerjisi artar mı, azalır mı, aynı mı kalır? Cevabınızı açıklamanız lazım.

2. İdeal bir gazın basıncı P, hacmi V, sıcaklığı T ve mol sayısı n'nin birbiriyle ilişkisi $PV = nRT$ şeklindedir, burada R = 8,3 J/mol-K evrensel gaz sabitidir. Bu $PV = Nk_BT$ diye de yazılabilir, N gazdaki atom sayısı, k_B = 1,4 × 10^{-23} J/K ise Boltzmann sabitidir. m kütlesinde N tane atomdan oluşan ideal gazın atomik modeline göre,

$$P = \frac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle\right)$$

   Buradaki (v^2) atomların hızının karesinin ortalamasıdır.

   (a) Sıcaklık ile atom başına ortalama kinetik enerji arasındaki ilişki nedir?

   (b) Sıcaklık sabitken, bir piston yavaş yavaş itilerek gazın hacmi V'den $V/3$'e düşürülürse gazın enerjisine ("iç enerji") ne olur?

   (c) Piston tarafından gaz üzerinde yapılan işin formülü, sabit sıcaklıktaki bu

işlem için şöyledir:

$$W = nRT \ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right)$$

Burada V_i ve V_f ilk ve son (final) hacimler. 5 mol ideal gaz üzerinde 200 K sıcaklıkta yapılan işi hesaplayın. Logaritmayı sayısal olarak hesaplamayın.

(d) İş-enerji teoremine göre, yapılan işin enerjiye dönüşmesi gerekir. Bu enerji nereye gidiyor? Sonucunuzu, termodinamiğin birinci kanunu $\Delta E = \Delta Q + \Delta W$'yi kullanarak yorumlayın; ΔE gazın iç enerjisindeki değişme, ΔQ gazın emdiği ısı ve ΔW piston tarafından gaz üzerinde yapılan iştir.

3. 8,3 × 10^5 N/m^2 basınçlı 1 mol oksijen gazı, 1 *L* hacimli bir kabın içinde.

(a) Gazın sıcaklığını hesaplayın.

(b) Bir oksijen atomunun ortalama kinetik enerjisini hesaplayın.

(c) Bir oksijen atomunun ortalama hızını hesaplayın.

(R = 8,3 JK^{-1} mol^{-1} olarak alın; k_B = 1,4 × 10^{-23} JK^{-1}; N_{Avogadro} = 6 × 10^{23}; 1 mol oksijen 16 gram)

4. Enerjinin eşit bölünmesi uyarınca, tek boyutta hareket eden bir molekülün ortalama kinetik enerjisi $\frac{1}{2}k_BT$'dir, buradaki k_B Boltzmann sabiti, T de sıcaklıktır. Bir gazdaki moleküller üç boyutta hareket ederken her boyuttaki ortalama hız birbirine neredeyse eşittir.

(a) Gazdaki bir molekülün ortalama hızı v kaçtır?

(b) T sıcaklığındaki bir ideal gaz için

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T}$$

olduğunu gösterin; v moleküllerin üç boyuttaki ortalama hızıdır.

(c) $\frac{dv}{dT} \approx \frac{\Delta v}{\Delta T}$ yaklaşıklığını kullanarak, hava sıcaklığı kışın -3°C'den yazın 24°C'ye geliyorsa hava moleküllerinin ortalama hızındaki değişmeyi (Δv) ilk hız v_i cinsinden hesaplayın. Kıştan yaza geçerken ortalama hız artıyor mu azalıyor mu?

5. İçinde 2 mol He gazı bulunan 8,3 litre hacimli bir kap 27°C sıcaklıkta tutuluyor. Boltzmann sabiti k = 1,4 × 10^{-23} J/K. Gaz sabiti R = 8, 3 J / (°K mol).

(a) Kabın içindeki He atomlarının ortalama kinetik enerjisini bulun.

(b) Kabın içindeki basıncı bulun.

(c) Kabın üzerindeki bir valf açılıyor ve gazın yarısı dışarı salınıyor. Bu sırada sıcaklık sabit tutuluyor. Bu işlemden sonra basıncın yeni değeri ne kadardır?

(d) Bu işlem sırasında gaz üzerinde ne kadar iş yapılmıştır?

6. N molekülden oluşan bir ideal gaz V hacimli bir kutu içinde. Kutunun, her biri $V/2$ hacimli iki eşit yarısı var. Sol ve sağ yarım kutularda j ve $N - j$ tane molekül bulunmasının $\Omega(j\ ; N) = \binom{N}{N-j} = \frac{N!}{j!\,(N-j)!}$ kadar farklı yolu var. Entropi $S(j\ ; N) = k_B\ ln\ \Omega(j\ ; N\ )$ olarak tanımlanıyor. Entropinin en yüksek değeri $j = N - j = N/2$ durumunda gerçekleşiyor. İlk başta $j = N$; moleküllerin tamamı bir piston tarafından sol yarım kutuda tutuluyor. Sistem, sıcaklık hep sabit kalacak şekilde bir ısı banyosunda tutuluyor.

   (a) Gazın N ve T cinsinden toplam enerjisi ne kadardır?

   (b) N ve T sabit kalırken toplam enerji değişir mi?

   (c) Basınç P'yi N , V ve T cinsinden ifade edin.

   (d) Piston serbest bırakılıyor ve hacim $V/2$'den V değerine ulaşana kadar (piston kutunun sağ duvarına yapışana kadar) hareket ediyor. Bu süreçte gazın piston üzerine ne kadar iş yaptığını bulun.

   (e) Bu süreçte gaza çevresinden aktarılan ısı ΔQ ne kadardır? Aktarılan ısı miktarını termodinamiğin birinci kanununu (enerji korunumunu) kullanarak bulun.

   (f) Başlangıç durumunda gazın entropisi ne kadardı?

   (g) Son durumda gaz tüm hacme yayılmış oluyor. Kutunun her iki yarısında eşit sayıda molekülün bulunduğu ($j = N - j = N/2$) bu durum entropinin en yüksek değere ulaştığı denge durumudur. Bu son durumun entropisi ne kadar?

   (h) Son durumla ilk durum arasındaki entropi farkı ΔS ne kadar?

7. Hacmi V olan bir kutuda N tane molekülden oluşan ideal bir gaz var. Moleküllerin fN tanesi kutunun sol yarısında, kalan $(1 - f)N$ molekül de sağ yarısında.

   (a) fN molekülün sol yarım kutuda, kalanların da sağ yarım kutuda olmasının $\Omega(f\,N\ ; N\ )$ tane yolu var. Bunu hesaplayın.

   (b) Entropi $S(f\,N\ ; N\ )$'yi Stirling formülünü kullanarak hesaplayın.

   (c) Entropi f oranının hangi değeri için en yüksek değere ulaşır? (Sonucu $S(f\,N\ ; N\ )$ fonksiyonunun f'ye göre maksimum değerini arayarak, türev alarak gösterin.)

   (d) Entropinin en yüksek değeri nedir?

19
Coulomb Kanunu

Deneyler gösteriyor ki madde parçacıklarının *yük* denen bir özelliği var. Elektrik olayları (ve daha sonra göreceğimiz mıknatıslık) bu özellikten kaynaklanıyor. İki tür yük var, "pozitif" ve "negatif." Birbirine zıt olan iki tür yük birbirini çekerken, aynı tür yüke sahip iki nesne de birbirini "elektrostatik" kuvvetle itiyor. Elektrostatik kuvvet de kütleçekimi kuvveti gibi uzun erimli bir kuvvet, fakat ondan çok daha güçlü. Maddeyi bir arada tutmak, atomların, moleküllerin, akışkanların ve katıların dağılmadan, çoğunlukla nötr olarak, sıfır toplam yükle bir arada durması bu kuvvetin işi.

19.1 TEMEL PARÇACIKLAR, YÜK KUANTUMU VE YÜK BİRİMLERİMİZ

Yük, tıpkı kütle gibi, çekirdeği (ve atomları ve yalıtılmış haldeyken kararsız olan diğer temel parçacıkları) oluşturan elektron, proton ve nötronlar gibi temel parçacıkların bir özelliği. Atomlar çekirdek ile etrafındaki elektronlardan oluşuyorlar. Proton ve elektron kararlı parçacıklar, normal şartlarda boşlukta kendi kendilerine iken başka parçacıklara dönüşmüyor, bozunmuyorlar. Sıradan maddenin kütle bakımından yaklaşık yarısını oluşturan nötron, boşlukta (vakumda) ise kararsız oluyor, ömrü yaklaşık 15 dakika sürdükten sonra dağılıp, bir proton, bir elektron ve "*antinötrino*" denen kütlesiz bir parçacığa dönüşüyor. Nötronlar, çekirdeği bir arada tutmak gibi bir iş yaptıkları çekirdeğin içindeyken kararlı durumdalar. Çekirdekteki protonlar arasındaki itici elektrostatik kuvveti, *güçlü (yeğin) nükleer kuvvet* bastırıyor, bu kuvvet çekirdekte aşağı yukarı eşit sayıda nötron ve proton bulunmasını da gerektiriyor.

Kararsız temel parçacıklar, CERN'deki dev makineler gibi hızlandırıcılarda yapay olarak üretilen çok yüksek enerjili çarpışmalarda çok kısa süreliğine var olabilirler. Bunlar bizim Güneş'imiz gibi yıldızların merkezlerinde, çok enerjili kara deliklerin çevrelerinde ve Dünya'nın atmosferinde *kozmik ışınların* maddelerle çarpışmalarında doğal olarak da ortaya çıkıyorlar. Kozmik ışınların bazı

türleri yüksek enerjili kararlı parçacıklar, kimisi de *fotonlardır*. Vakumlu ortamda kararsız olan temel parçacıklar çok yoğun veya çok yüksek enerjili şartlar altında kararlı davranabiliyorlar. Bütün yüksek enerjili temel parçacıklar çok eski zamanlarda, Büyük Patlama'dan sonraki ilk saniyelerde, ilk dakikalarda kararlı durumda ve bol miktardaydılar.*

Nükleer (atom çekirdeği içindeki) ve atomik maddenin üç temel yapı taşından nötronun yükü yok (sıfır), proton ile elektronun yükleri ise birbirine eşit ama zıt, $+e$ ve $-e$. Protonların $+e$ pozitif yükü, elektronların da $-e$ negatif yükü var. Bu iki parçacığın hangisinin yüküne –, hangisininkine + dendiği önemli değil, böylesi âdet olmuş. Burada önemli olan, protonla elektronun yüklerinin birbirinin tersi olması.

Deneylerden anlaşılıyor ki, diğer bütün temel parçacıkların da pozitif veya negatif (veya sıfır) yükleri var ve bunlar elektron ve proton yük *kuantumu e*'nin *ancak tam sayılı, ya da kuarklar için, kesirli katları* kadar. Protonları ve nötronları oluşturan parçacıklar olan kuarklar $\pm 2/3\ e$ ve $\pm 1/3\ e$ yüküne sahip, fakat kuarklar asla yalıtılmış halde bulunmuyorlar; deneylerin ve şimdiki teorilerin düşündürdüğüne göre hiçbir zaman da yalıtılamazlar. Her halükârda, "sıradan" madde şartlarında yük, *e*'nin katları kadar oluyor.

Atom çekirdeği pozitif yüklüdür, çünkü içinde protonlar ve nötronlar vardır, elektronlar yoktur. İçinde Z tane proton olan bir çekirdeğin yükü $+Ze$'dir. Bu çekirdek, nötr bir atom oluşturmak için Z tane elektronu kendine çekip bağlar. Sıradan şartlarda madde nötrdür, nötr atomlardan oluşur. Bazı atomlar çözeltilerde *iyonlaşmış*** durumda olurlar. Maddenin yüksek derece iyonize hali olan plazmada, genellikle yüksek sıcaklık, basınç ya da yoğunlukta, nötr durumda çok az atom kalmış olabilir. Yine de, plazmalar ve çözeltiler bile toplamda, makroskobik olarak nötrdür; mikroskobik olarak ise plazmadaki ya da çözeltideki pozitif ve negatif yüklü parçacıkların sayısı eşittir. İçinde madde bulunan her makroskobik hacimde, yalıtılmış çekirdekler ve protonlar da dahil olmak üzere pozitif iyonların toplam yükü, negatif yüklü iyonların ve elektronların toplam yüküne genellikle eşit olur. Bunun nedeni, uzun erimli kuvvetlerin en güçlüsü olan Coulomb kuvvetinin negatif yüklerin pozitif yüklerden ayrılmasına kolay kolay izin vermemesidir. Makroskobik ölçüde madde, negatif yüklerinin bir yana toplanıp diğer tarafların pozitif yüklü kaldığı *kutuplaşmış* bir hale getirilebilir. Bunun tipik yolu, bir cam veya plastik parçasını ipek veya yüne sürtmektir. Yükün ayrışması kararsız ve geçici bir

---

* Mesela bkz. S. Weinberg, *İlk Üç Dakika*, çev. Zekeriya Aydın ve Zeki Aslan, Kırmızı Kedi Yayınları, 2014.

** İyon, pozitif veya negatif yüklü bir atom ya da moleküldür. Atom ya da molekül, elektronlarının bir kısmını kaybettiği zaman pozitif yüklü bir iyon oluşmuş olur. Atoma veya moleküle fazladan elektronlar geldiği zaman da negatif yüklü iyon oluşur.

durumdur. Zıt yükleri sistemin farklı yerlerine gitmesini sağlayacak ve yüklerin nötr hale gelmek üzere hareket etmesini engelleyecek özel bir çaba gösterilmezse, yükler cismin her parçasının nötr olmasını sağlayacak şekilde dağılırlar.

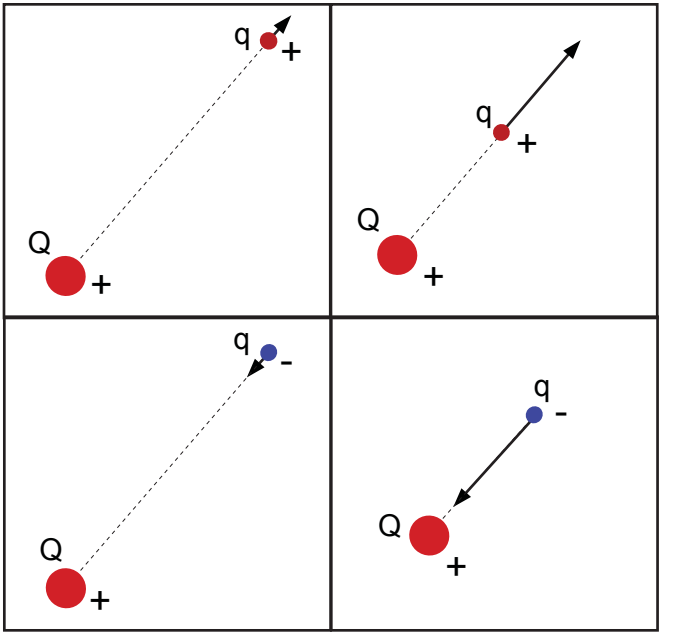
SI yük birimi olan ve C ile gösterilen *Coulomb*, makroskobik bir sistemin bir yanına ayrılabilecek olan yük miktarının tipik ölçüsüdür. Doğal birim olan yük kuantumu e,

$$e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ C$$

1 C yükü ayırmak, aslında makroskobik bir modelde elektronların çok küçük bir kesiminin yerini değiştirmek demektir (1. Probleme bakın).

19.2 ELEKTROSTATİK KUVVET (COULOMB KUVVETİ)

Şekil 19.1'de bir q yüküne, Q yükü tarafından uygulanan kuvveti görüyoruz. q yükünün üstündeki kuvvet vektörü okla gösterilmiş. Newton'un Üçüncü Kanununa göre, q yükü de Q yüküne eşit ve zıt yönlü bir kuvvet uygular, bunu Q üzerinde bir okla gösteririz; bu okun uzunluğu q üstünde gösterilenle aynı olur ama ters yönü işaret eder. q'yu Q yüküne yaklaştırdıkça kuvvet de artar. İki yük aynı cinsten ise (Şekil 19.1'de üstteki resimlerde olduğu gibi) kuvvet her zaman uzaklaşma



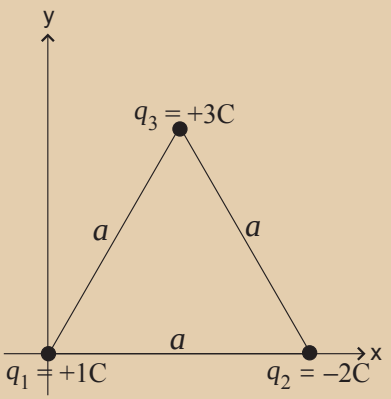
Şekil 19.1

yönündedir: *Aynı yükler birbirini iter*. Eğer q yükü negatifken Q yükü pozitifse, her iki yük üzerindeki kuvvet de ötekine dönüktür: *Zıt yükler birbirini çeker*. Şekil 19.1'de alttaki resimler birbirine zıt yükler arasındaki kuvvetleri gösteriyor. Elektrostatik kuvvet veya Coulomb kuvveti denen bu kuvvetin büyüklüğü, iki yük arasındaki mesafenin karesiyle ters orantılı. Deneylerde farklı yükler kullanarak, kuvvetin yüklerden her birine orantılı olduğunu göstermek mümkün. Demek ki

$$\mathbf{F}_E = K\frac{qQ}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}. \tag{19.1}$$

Burada r iki yük arasındaki mesafe, $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$ ise Q'dan q'ya giden radyal yönü gösteren birim vektör. Q'nun q'ya uyguladığı kuvvetin yönü bu. Öndeki sabit, SI birimleriyle $K \equiv 1/(4\pi\epsilon_0) = 8{,}98 \times 10^9$ N m^2 C^{-2}. Buradaki ϵ_0 da bir başka sabit: $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} C^2. Orantı sabiti K'yi 4π ve yine bir sabit olan ϵ_0 ile göstermek kolaylık sağlar. Bunun nedenini daha sonra göreceğiz.

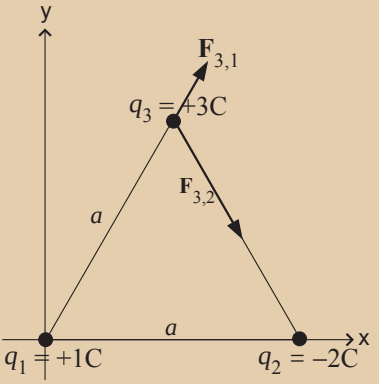
Çözümlü Problem: Coulomb Kuvveti



Üç yük, bir eşkenar üçgenin köşelerine şekildeki gibi yerleştirilmiş. q_3 üzerinde diğer iki yük tarafından uygulanan toplam kuvveti gösterin.

Coulomb kuvveti vektörel bir nicelik, dolayısıyla önce her kuvvetin büyüklüğünü ve yönünü ayrı ayrı saptayıp, sonra bütün kuvvet vektörlerini toplayarak toplam kuvveti bulmamız lazım.

Burada q_3'e etki eden iki kuvvet var: $\mathbf{F}_{3,1}$ (q_1'den kaynaklanan) ve $\mathbf{F}_{3,2}$ (q_2'den kaynaklanan). Coulomb kuvvetini hesaplamak için önce yüklerin işaretlerine (+, –) ve yerlerine bakarak kuvvetin yönünü bulmalıyız. Aşağıda görüldüğü gibi burada $\mathbf{F}_{3,1}$, q_1'den uzağa doğru, $\mathbf{F}_{3,2}$ ise q_2'ye doğru gidiyor.



Yönleri bir kere belirledik mi bu kuvvetlerin büyüklüğünü Denklem 19.1'i kullanarak bulabiliriz:

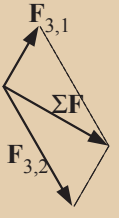
$$|\mathbf{F}_{3,1}| = K\frac{|q_3||q_1|}{a^2} = K\frac{(3C)(1C)}{a^2}\ N$$
$$|\mathbf{F}_{3,2}| = K\frac{|q_3||q_2|}{a^2} = K\frac{(3C)(2C)}{a^2}\ N$$

Dikkat edin, büyüklük her zaman pozitiftir.
Şimdi yönlerle büyüklükleri birleştirip $\mathbf{F}_{3,1}$ ve $\mathbf{F}_{3,2}$'i vektör olarak yazabiliriz. Bunun icin geometri kullanacağız:

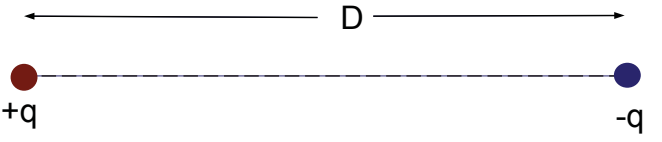
$$\mathbf{F}_{3,1} = K\frac{3}{a^2}[\cos 60°\mathbf{i}\ + \sin 60°\mathbf{j}\ ] = K\frac{3}{a^2}[\frac{1}{2}\mathbf{i}\ + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\ ]\ N$$
$$\mathbf{F}_{3,2} = K\frac{6}{a^2}[\cos 60°\mathbf{i}\ - \sin 60°\mathbf{j}\ ] = K\frac{6}{a^2}[\frac{1}{2}\mathbf{i}\ - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\ ]\ N$$

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{F}_{3,1} + \mathbf{F}_{3,2} = K\frac{3}{a^2}[(\frac{1}{2}+1)\mathbf{i}\ + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3})\mathbf{j}\ ]$$
$$= K\frac{3}{a^2}[\frac{3}{2}\mathbf{i}\ - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\ ]\ N$$

ΣF'nin yönünü göstermek için de geometri kullanabiliriz:



Şekil 19.2'de gördüğünüz gibi, aralarında D kadar mesafe olan birbirine eşit ve zıt $+q$ ve $-q$ yükleri düşünün. Bu tür bir düzene ***elektrik dipol*** denir. Elektrik dipol nötr cisimlerde yük ayrışmasının en basit halidir. Doğada çok sık karşılaşılır. Diatomik (çift atomlu) moleküllerin çoğu elektrik dipoldür; çünkü moleküldeki elektronlar atomlardan birine doğru yoğunlaşır, böylece o atom negatif bir iyon, diğeri de pozitif bir iyon haline gelir. İyona dönüşen bu iki atom birbirini çeker, fakat bütün elektronlardan kaynaklanan itici kuvvetlerden dolayı birbirilerinin içine doğru ivmelenemezler. Kuvvetler atomların arasında bir D denge mesafesinde dengelenir. NaCl (sodyum klorür, sofra tuzu) molekülü bir elektrik dipol örneğidir, *iyonik bağ* ile bir arada durur. Elektrik dipole makroskobik bir örnek ise, cam çubuğun kumaşa sürtülmesiyle çubuğun iki ucunun yüklü hale getirilmesidir.



Şekil 19.2

19.3 ELEKTRİK ALAN VE VOLTAJ

"Q yükü diğer q yüküne bir kuvvet uygular" demek yerine şöyle de diyebiliriz:

> Q yükü uzaya öyle bir özellik verir ki, herhangi bir q yükü Q'dan belli bir mesafeye konduğunda onun üzerinde bir kuvvet etki eder. Uzayın bir mesafeden etki eden kuvvetlere aracılık etme özelliğine *alan* denir, elimizdeki örnek de bir *elektrik alanıdır*.

r noktasına konan bir q yükü üzerindeki kuvveti şöyle yazabiliriz:

$$\mathbf{F}_E = qK\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} \equiv q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{19.2}$$

Q yükünden $\mathbf{r}$ uzaklıktaki konumda, bu noktadaki elektrik alan $\mathbf{E}(\mathbf{r})$'ı şöyle tanımlarız:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = K\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} \tag{19.3}$$

Elektrik alanı vektörel bir niceliktir. Birimi Newton/Coulomb'dur.

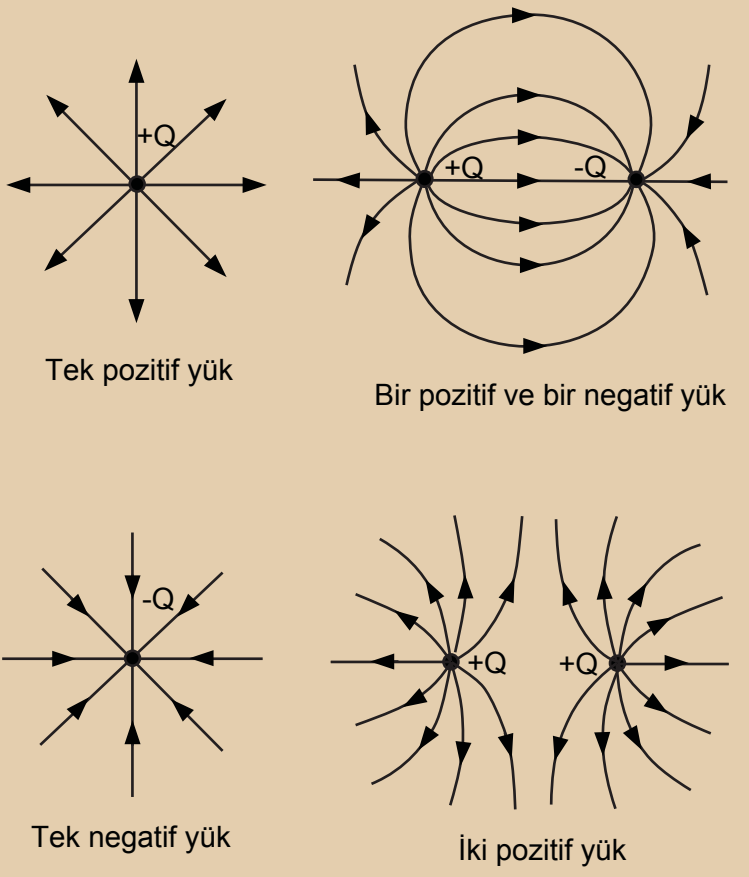
Tek bir noktasal yük Q için, bu yükten kaynaklanan elektrik alanı her zaman radyal yön ($\hat{\mathbf{e}}\mathbf{r}$) boyuncadır ve r uzaklığı arttıkça elektrik alanının büyüklüğü azalır.

Eğer Q pozitifse, alan radyal olarak dışa doğrudur, eğer Q negatifse alan radyal olarak içe doğru olur.

Farklı noktalardaki elektrik alanı vektör oklarını birbirine ekleyerek elektrik alan *çizgileri* ve bir elektrik alan *deseni* elde ederiz, bu da bir elektrik sisteminin genel özelliklerini anlamak için çok faydalıdır. Elektrik alanının daha güçlü olduğu yerlerde elektrik alan çizgileri birbirine daha yakın olur, elektrik alanının zayıf olduğu yerlerde ise birbirinden ayrı durur; bunu aşağıdaki şekilde gösterilen tek bir nokta yüke ait elektrik alan deseninde de görebilirsiniz. Elektrik alan çizgileri negatif yüklerin olduğu yerlerde birleşiyor, pozitif yüklerin olduğu yerlerden dağılıyor.

Elektrik Alan Desenleri

Çeşitli yük yerleşimleri için elektrik alanı desen örnekleri:



Q'nun r'ye yerleştirilmiş belli bir q'ya uyguladığı FE kuvveti, Coulomb kuvvetidir:

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E} = K\frac{qQ}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} \tag{19.4}$$

Elektrik alanı, birim yük üzerinde uygulanan kuvvet ($\mathbf{E} = \mathbf{F}_E/q$, ya da $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$) olarak tanımlandığına göre, bu kavramı genişleterek *elektrik kuvvet tarafından birim yük üzerinde yapılan iş* de tanımlanabilir. Elektrostatik kuvvet korunumlu bir kuvvet, bir potansiyel enerjiyle ilişkili. Böylece, "birim yük için" anlayışı doğal olarak *birim yük için potansiyel enerji* kavramına uzanıyor:

$$W = \int \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{dr} = q\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{dr} = -\Delta U_E \tag{19.5}$$

Şimdi şunu tanımlayalım:

$$\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{dr} = -\Delta V \quad \text{"Voltaj Farkı"} \tag{19.6}$$

Böylece $W = -q\Delta V$, ve $\Delta U = q\Delta V$ ve U (r) = qV (r). Her **r** noktasındaki voltaj (namı diğer gerilim, veya kimi zaman söylendiği gibi "elektrik potansiyeli"), elektrostatik potansiyel enerjinin, yük q kere o noktadaki voltaja eşit olacağı şekilde tanımlanıyor. Ama **r** noktasında hiç yük yokken bile, bütün diğer "kaynak" yüklerden dolayı voltaj hep orada. **r**'deki voltaj başka yerlerdeki yükler tarafından oluşturuluyor: *Tıpkı elektrik alanı* **E** *gibi, voltaj da uzaya ait bir özellik!* Elektrik alanı ile voltaj arasındaki ilişki,

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \text{ tek boyutta, ve} \tag{19.7}$$

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) = -\nabla V \text{ genel olarak (3 boyutta)} \tag{19.8}$$

Voltajın boyutları $[V] = [U/q]$, birimi de Joule/Coulomb; bu birime Alessandro Volta'nın onuruna "Volt" adı verilmiş.

1 V (Volt) = 1 J/C = 1 N m/C

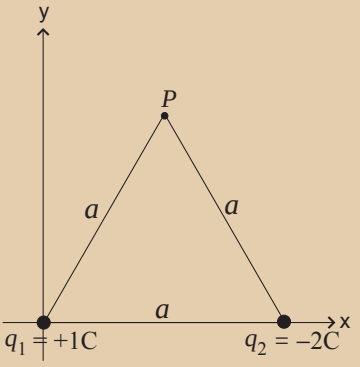
Elektrik alanının birimi de

1 N/Coulomb = 1 Volt/m

Q'dan kaynaklanan elektrik alanı Q ile orantılı olduğundan ("elektrik alanı Q'ya doğrusal olarak bağlıdır"), Q_1 ve Q_2 diye iki ayrı yükten kaynaklanan toplam elektrik alanı da gayet basit bir şekilde Q_1'den kaynaklanan elektrik alanıyla Q_2'den kaynaklanan elektrik alanının toplamıdır. Bütün *doğrusal* durumlar için geçerli olan bu basit ama önemli gözlemin adı "*Süperpozisyon İlkesi*".

Coulomb Kanunu, *Maxwell Denklemlerinin* ilki olan *Gauss Kanununa* çıkar. Gauss Kanunu elektrik alanı dağılımı ile bu elektrik alanının kaynağı olan yükler arasında güçlü bir bağlantının formülünü verir.

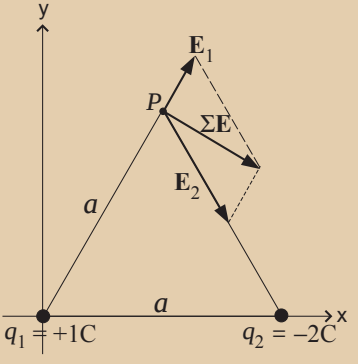
Çözümlü Problem: Elektrik alan ve Elektrik Potansiyel



Bir önceki örnekteki gibi eşkenar üçgenin köşelerinde bulunan yükleri düşünün, ama bu sefer P noktasında q_3 yükü olmasın (şekle bakın).

(a) P 'deki elektrik alanını bulun.

Elektrik alan bir yandan da "birim pozitif yük üzerindeki kuvvet" olarak tanımlanan vektörel bir nicelik olduğu için, P'deki elektrik alanının yönünü bulmak amacıyla önce bir pozitif test yükü $+q_t$'yi P'ye koymamız lazım. $\mathbf{E} = \mathbf{F}_E/q$ olduğundan, elektrik alanındaki yönler, $+q_t$ üzerinde q_1 ve q_2'den kaynaklanan Coulomb kuvvetlerinin yönleriyle aynıdır (aşağıdaki şekle bakın).



Denklem 19.3'ü kullanırsak, $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{E}_1$'in büyüklükleri şöyle:

$$|\mathbf{E}_1| = K\frac{|q_1|}{a^2} = K\frac{1}{a^2}\ N/C$$
$$|\mathbf{E}_2| = K\frac{|q_2|}{a^2} = K\frac{2}{a^2}\ N/C$$

Bu sonuçları $\mathbf{E}_1 = \mathbf{F}_{qt,1}/q_t$ ve $\mathbf{E}_1 = \mathbf{F}_{qt,1}/q_t$ olmasından da çıkarabiliriz. Bir önceki Coulomb kuvveti örneğine benzer şekilde, P'deki toplam elektrik alanını vektörleri toplayarak buluyoruz,

$\Sigma\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$:

$$\mathbf{E}_1 = K\frac{1}{a^2}[\cos 60°\mathbf{i}\ + \sin 60°\mathbf{j}\ ] = K\frac{1}{a^2}[\frac{1}{2}\mathbf{i}\ + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\ ]\ N/C$$
$$\mathbf{E}_2 = K\frac{2}{a^2}[\cos 60°\mathbf{i}\ - \sin 60°\mathbf{j}\ ] = K\frac{2}{a^2}[\frac{1}{2}\mathbf{i}\ - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\ ]\ N/C$$

Böylece,

$$\Sigma\mathbf{E} = \frac{K}{2a^2}[3\mathbf{i}\ - \sqrt{3}\mathbf{j}\ ]\ N/C$$

(yukarıda gösterilen yönde).

(b) P'deki elektrik potansiyeli (voltajı) bulun.

Elektrik potansiyel *V*, skaler bir niceliktir ve şöyle bulunur:

$$V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{Kq}{r}$$

Bu durumda toplam elektrik potansiyel q_1 ve q_2'den kaynaklanan potansiyellerin skaler çarpımından ibarettir:

$$V = \frac{Kq_1}{r_1} + \frac{Kq_2}{r_2} = \frac{1K}{a} + \frac{-2K}{a} = -\frac{K}{a}\ \ Volt$$

Yüklerin işaretlerini de işlemde tuttuğumuza dikkat edin.

PROBLEMLER

1. (a) −1 C toplam yük elde etmek icin kaç elektron gerekir?

   (b) Santimetrelik boyutlarda tipik bir makroskobik nesnede, büyüklük mertebesi olarak kaç atom olur (*büyüklük mertebesi ≡ 10 üzeri kaç*)?

   (c) Plastik tarağınızı bir ucunda 1 C negatif yük toplanacak kadar sürtseniz, taraktaki atomların ne kadarlık oranı bu kutuplaşmaya bir elektron vererek katkıda bulunmuş olur?

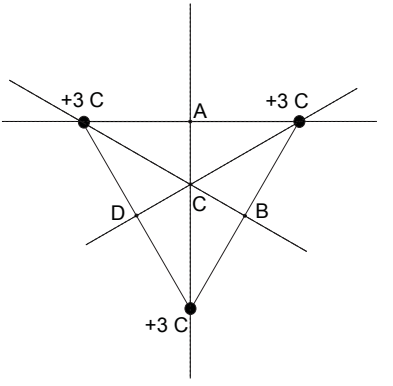
2. Kütleçekimi kuvveti ile Coulomb kuvveti arasında ne gibi benzerlikler, ne gibi farklar var?

3. Bir hidrojen atomundaki elektron ile proton arasındaki kuvveti hesap edin. Bunu, bu iki parçacık arasındaki kütleçekimi kuvveti ile karşılaştırın. H atomunun yörünge yarıçapı 0,5 A (Angström). Bir elektronun kütlesi: $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg, bir protonun kütlesi: $1{,}7 \times 10^{-27}$ kg, 1 Angström = 10^{-10} m.

4. (x, y) koordinatları (0, 1 m) ve (0, –1 m) olan noktalara + 2C'luk yükler, (1 m, 0) ve (–1 m, 0) noktalarına da –2 C'luk yükler yerleştirilmiş. Böyle bir yük dağılımına "*kuadrupol (dört kutuplu)*" denir.

   (a) Kuadrupolü gösteren bir şekil çizin, elektrik alan desenini gösterin.

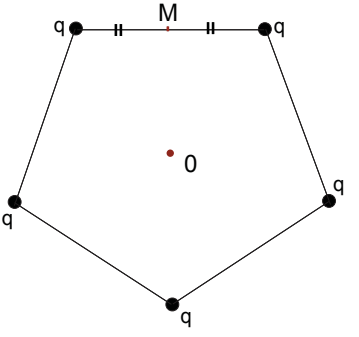
   (b) Merkez noktasında (0, 0) elektrik alanının büyüklüğü ve yönü nedir?



5. Her kenarı 1 m olan, şekildeki gibi bir eşkenar üçgenin köşelerinde +3C yükler var.

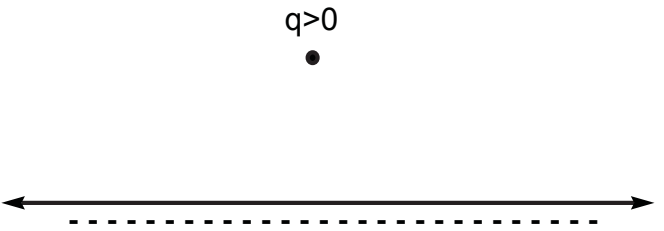
   (a) A, B, C ve D noktalarında elektrik alanın büyüklüğü ve yönü nedir?

   (a) Bu üç yüklü yerleşimin elektrik alan desenini şeklin üzerine çizin.

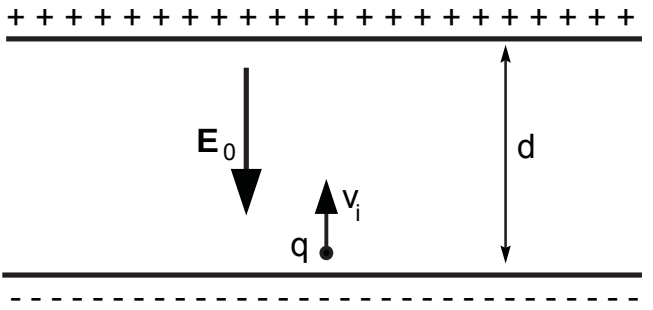


6. $q > 0$ olan eşit yükler, şekildeki gibi bir beşgenin köşelerine yerleştirilmiş.
   (a) M noktasındaki elektrik alanının yönü nedir?
   (b) 0 noktasındaki elektrik alanının büyüklüğü ve yönü nedir?

7. Bir halka düşünün, üzerinde birbirine eşit aralıklarla dizilmiş N kadar çok sayıda ve birbirine eşit pozitif yük olsun.
   (a) Halkanın merkezinde elektrik alanının büyüklüğü nedir?
   (b) Halka üzerindeki bir noktada elektrik alanının yönü nedir?
   (c) Bütün yükler eşit ve negatif olsaydı halkanın üstündeki bir noktada elektrik alanının yönü ne olurdu?



8. Şekildeki gibi, negatif yükün eşit olarak dağıldığı sonsuz bir düzlemin yanında duran pozitif bir yük için "*kuvvet çizgilerini*", yani elektrik alan desenini çizin.

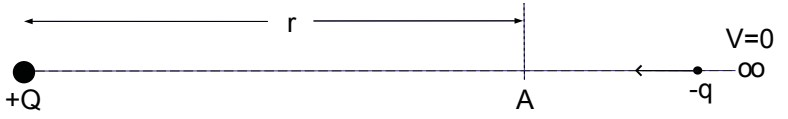


9. q pozitif yüküne ve m kütlesine sahip bir noktasal parçacık, şekilde görüldüğü gibi, aralarında d mesafesi bulunan birbirine zıt yüklü iki yatay sonsuz levhanın arasından dik olarak atılıyor. Elektrik alanı **E** düzenli (eşit dağılımlı) ve levhalara dik yönde, okun yönü ise 21. Bölümde işleyeceğimiz üzere pozitif yüklü levhadan negatif yüklü levhaya doğru. Düzenli elektrik alanının gücü E_0 ise, parçacığın üstteki levhaya ulaşması için gereken minimum v_i ilk hızı ne kadardır? d mesafesini kat etmek ne kadar sürer? Kütleçekimini göz ardı edin.

10. Yukarıdaki problemdeki parçacık v_i ilk hızına sahipse ve bu hız dik olmayıp

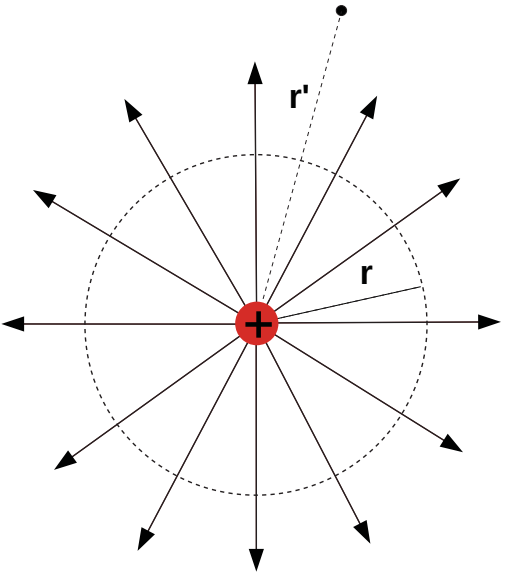
levhalara θ açısı yapıyorsa parçacık nasıl bir yol izler? Kütleçekimini göz ardı edin.

11. Eski televizyon ekranlarının arkasındaki tüpler gibi bir dik *katot ışınlı tüpte*, E gücündeki elektrik alan aşağıya doğru dik yönde olacak şekildeyken bir elektron konuyor.
    (a) Elektron üzerindeki elektrik kuvvetinin yönü nedir?
    (b) Elektron üzerinde etki eden Dünya'nın kütleçekimi kuvvetinin yönü ve büyüklüğü nedir?
    (c) Vakumlu ortamda, elektronun ağırlığını dengelemek için elektrik alanının büyüklüğü E ne kadar olmalıdır?
    (d) Bu elektrik alanda, katot ışınlı tüpün iki ucu arasındaki voltaj farkı ne kadardır? Tüpün uzunluğu 50 cm. Uçlardan hangisinde voltaj daha yüksek olur, (+) yüklü uçta mı yoksa (−) yüklü uçta mı?



12. Şekildeki gibi bir $-q$ negatif noktasal yükünü, çok uzak bir yerden (= sonsuzdan; $V(\infty) = 0$) sabit hızla, $+Q$ pozitif yükünün r mesafesi kadar yakınına getiriyorsunuz.
    (a) Sizin tarafınızdan yapılan iş ne kadar?
    (b) $-q$ yükü tarafından yapılan iş ne kadar? Bu yük ne kadar enerji kazanıyor ya da kaybediyor?
    (c) Yukarıda bulduğunuz işi kullanarak r'de $+Q$'dan kaynaklanan voltajı bulun.
    (d) Yukarıda bulduğunuz voltajı kullanarak r'de $+Q$'dan kaynaklanan elektrik alanını bulun. Bu sonuç, Coulomb kuvvetini kullanarak bulunan elektrik alanıyla uyuşuyor mu?

20
Gauss Kanunu



Şekil 20.1

Şekil 20.1'de, pozitif yüklü noktasal parçacık Q'nun oluşturduğu elektrik alan çizgilerini görüyorsunuz. Elektrik alanı radyal dış yönde ve şu biçimde:

$$\mathbf{E} = \frac{KQ}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}\ N\ C^{-1} \tag{20.1}$$

SI birim sisteminde elektrik alanının birimi N C^{-1}, Volt/metre, kısaca V/m olarak da tanımlanıyor. Yükü merkez kabul eden r yarıçaplı küre üzerindeki her noktada, elektrik alanı aynı, $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ değerindedir ve yüzey alanı $A = 4\pi r^2$ olan küresel yüzeye diktir. EA çarpma işlemini yapınca $4\pi r^2$ çarpanı sadeleşir.

Böylece,

$$EA = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{20.2}$$

Yarıçaptan bağımsız olarak, yükü merkezine alan her kürenin yüzeyi ile o küre üzerindeki elektrik alan değerinin çarpımı, birim sistemine özgü bir sabit çarpan kere yükü verir.* Bu ifadeyi genelleştirebiliriz:

> (Kapalı bir yüzeye ait küçük yüzey parçaları) × (her küçük yüzey öğesinde dışa dönük dik yöndeki elektrik alan bileşeni) toplamı, (bir sabit çarpan kere) yüzeyin icinde kalan toplam yüke eşittir:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \frac{Q_{\mathrm{i}}}{\epsilon_0} \qquad \text{[Gauss Kanunu]} \qquad (20.3)$$

İntegral işaretinin üstündeki küçük yuvarlak, *kapalı bir yüzey* için integral alınacağını gösteriyor. Burada **dS**, yüzey parçası *dS* büyüklüğünde, yönü kapalı yüzeye göre dışa dönük yönde, bu yüzey parçasına dik olan bir vektör. Bu durumda **E** · **dS** skaler çarpımı, bu yüzey parçasıyla ona dışa dönük yönde dik olan elektrik alan vektörü bileşenin çarpımıdır. **E** · **dS** skaler çarpımı, *elektrik alanın, yüzey öğesi dS üzerinden dışa doğru akısıdır*.

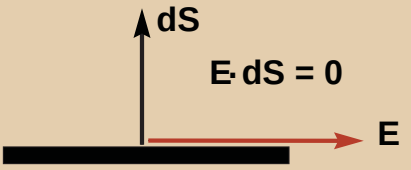
Akıyı Nasıl Hesaplarız?

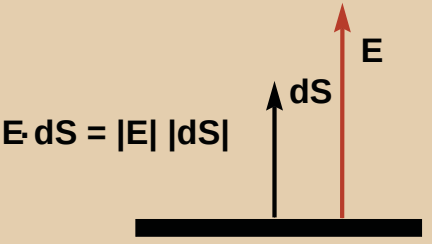
Eğer yüzey parçası, elektrik alanının yönüne dik doğrultudaysa, *akı*, **E** · **dS**, maksimumdur v *EdS*'ye, elektrik alanının büyüklüğüyle yüzeyin çarpımına eşittir. Eğer yüzey parçası, elektrik alanın yönüne dik fakat elektrik alan kapalı yüzeyin dışına doğru değil de tam ters yönde, içeri doğru ise o zaman akı –*EdS* kadardır. Yine maksimum mutlak değerde olan bu akı, bu kez içeri doğrudur: Eksi işareti akının içeri doğru olduğunu gösteriyor. Eğer yüzey, elektrik alana paralel doğrultudaysa, elektrik alan yüzeyin *içinden* geçmez, yüzeyden geçen elektrik akısı sıfırdır. **E** · **dS** = 0 ifadesi de bunu gösterir: Dikkat ederseniz, yüzey, **E**'ye paralel olduğu zaman, yüzeye dik olan **dS** vektörü **E**'ye de dik oluyor, buradan da **E** · **dS** = 0 ediyor zaten.

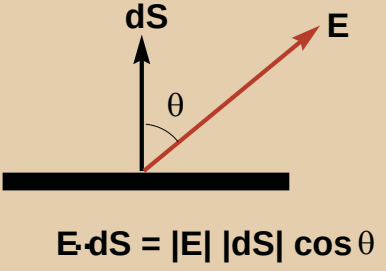
Eğer yüzey, **E**'ye paralel de, dik de değilse, **E** alanı ile yüzeyin *normal* (dik) yönü **dS** arasında bir θ açısı varsa, o zaman akı **E** · **dS** = $E\,dS\cos\theta$ olur. Alttaki resimde de görüldüğü üzere 0 ile $\pm E\,dS$ arasında bir değirdir bu.

---

* Türkçede aynı "alan" sözcüğünün hem geometrideki yüzey alanları için hem de elektrik alanı olarak tamamen farklı anlamlarla kullanılması bu konunun anlatımında karışıklık yaratabiliyor.







Şimdi gözenekli bir kafes, küçük küçük pek çok **dS** yüzey öğesinden oluşan kapalı bir yüzey hayal edin.

- Eğer $\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} > 0$, yani kapalı yüzey üzerinde toplanan akı pozitifse, o zaman kafesten *dışarı* doğru bir net elektrik alan akısı olur: Demek ki kafesin içinde kapalı bir elektrik alan *kaynağı* olmalıdır.
- Eğer $\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} < 0$ ise, kafesin *içine* doğru bir net elektrik alan akısı olur: Elektrik alanı her taraftan kafese doğru yönelir, kafesin içinde bir yere akar. Demek ki kafesin içinde sanki elektrik alanını toplayıp götüren bir *musluk deliği* vardır.

Pozitif yük, yükün çevresindeki uzayda dışa dönük net elektrik alan akısının *kaynağıdır*. *Negatif* yük ise, negatif yükü içine alan her kapalı yüzeyin içine doğru akısı olan bir elektrik alan kurar. *Negatif* bir yük, elektrik alan için bir *deliktir*.

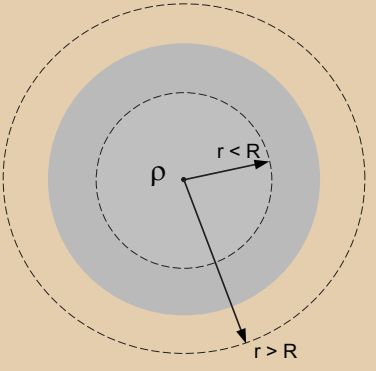
Çözümlü Problem: Akıyı Hesaplamak

Eğer $\mathbf{E} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ N/C elektrik alanı temsil ediyorsa, xy düzleminde 2 m^2'lik bir yüzeyden ne kadar akı geçer? Peki ya xz düzlemindeki aynı yüzey alanından?

Elektrik alan xy düzlemindedir. Yüzey de xy düzleminde olduğu zaman, elektrik alan **E**, yüzey vektörü dS'ye dik olur, o halde bu yüzeyden geçen akı sıfırdır.

Fakat söz konusu yüzey xz düzleminde olduğu zaman, yüzey vektörü y yönünde olur. Bu durumda akı şudur: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint [-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}]$ N/C $.2\mathbf{j}\,m^2 =$ 8 N m^2/C.

Çözümlü Problem: Yüklü Bir Yalıtkan Kürenin Elektrik Alanı



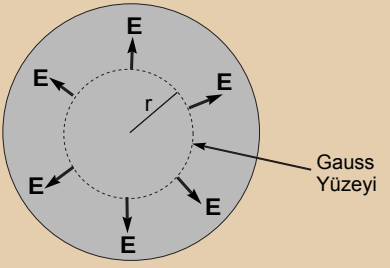
Yalıtkan bir maddeden yapılmış R yarıçaplı bir küre, düzenli bir yük yoğunluğu ρ'ya (ro) sahip.

(a) Gauss Kanununu kullanarak $r < R$ mesafesinde elektrik alanın büyüklüğünü bulun.

Bu kanuna göre,

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{20.4}$$

Demek ki yüklü küre içinde bir kapalı yüzeyi seçtiğimizde bu küreden geçen elektrik akısı, kürenin içindeki toplam yükle orantılı olacak. Bu ifade bu şekliyle epey güçlü bir ifade, üstelik bütün kapalı yüzeyler için geçerli. Fakat eğer akıllı davranırsak problemdeki simetrilerden faydalanabiliriz; öyle bir yüzey seçeriz ki buradaki elektrik alan her noktada yüzeye dik, büyüklüğü de yüzeyin her noktasında aynı olur. Bu durumda Gauss Kanununu kullanarak elektrik alanını çok kolayca hesaplayabiliriz. O halde, aşağıdaki resimde görüldüğü gibi, problemdeki yalıtkan küreyle aynı merkeze sahip, küresel bir Gauss yüzeyi seçelim.



Yük dağılımı düzenli olduğu için, bu Gauss küresel yüzeyinin her yerinde elektrik alanı simetriden dolayı sabit. Ayrıca yine simetriden dolayı elektrik alanı radyal olarak dışa doğru, yüzeyin her noktasında elektrik alanı Gauss yüzeyine dik. Yine Gauss Kanununa göre,

$$E(r) \oint dS = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \tag{20.5}$$

$\oint dS = 4\pi r^2$ integrali kolay. Gauss yüzeyinin içerisinde kalan toplam yükü ise, yük yoğunluğuyla Gauss yüzeyinin çevrelediği hacmi çarparak bulabiliriz:

$$Q_i = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Denklem 20.5'te Q_i ve $\oint dS$'i yerlerine koyarak, elektrik alanını buluyoruz:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \tag{20.6}$$

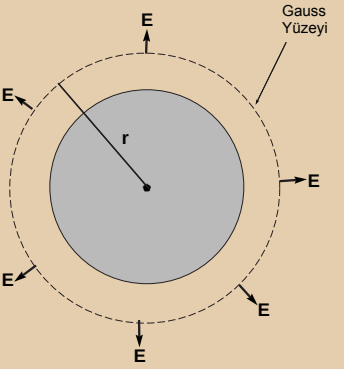
(b) Bu kürenin içindeki toplam yük ne kadar?

Yük düzenli olarak dağılmış olduğundan, yük yoğunluğunu kürenin toplam hacmiyle çarparak küre üzerindeki toplam yükü buluyoruz:

$$Q_i = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

(c) Gauss Kanununu kullanarak $r > R$ mesafesi için elektrik alanının büyüklüğünü bulun.

Kürenin dışındaki elektrik alanını bulmak için yine (a)'daki adımları, bu kez aşağıdaki gibi bir Gauss yüzeyi için izliyoruz.



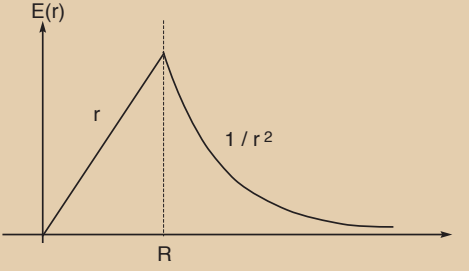
Bu yüzey için Gauss Kanununu şöyle yazabiliriz:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho R^3}{3\epsilon_0}$$

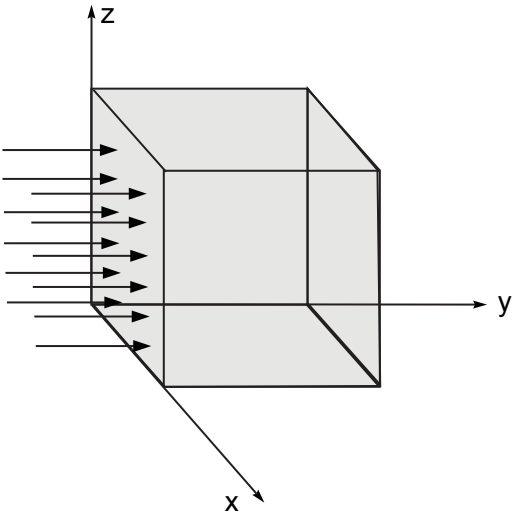
Böylece, yalıtkan kürenin dışındaki elektrik alanı şudur:

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

(d) r = 0'dan r>R'ye kadar elektrik alanı E(r)'nin büyüklüğünü çizin.



PROBLEMLER



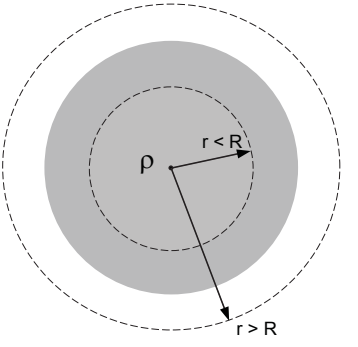
1. Şekilde gösterilen düzgün elektrik alanı her yerde $\mathbf{E} = 5\hat{\mathbf{j}}$ N/C. Küpün kenarları 5 cm.

   (a) Küpün kapalı yüzeyinden dışa doğru geçen toplam elektrik akısı ne kadar? (Akı integrali

   $$\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS}$$

   küpün 6 yüzeyinin hepsi üzerinden alınıp toplanmalı.)

   (b) Yüzeyden geçen akının sıfır olmadığı bir kapalı yüzey düşünebilir misiniz?



2. Yalıtkan malzemeden yapılmış R = 10 cm yarıçapındaki kürenin, şekilde görüldüğü gibi, ρ = 100 C $m-3$ değerinde düzenli bir yük yoğunluğu var.

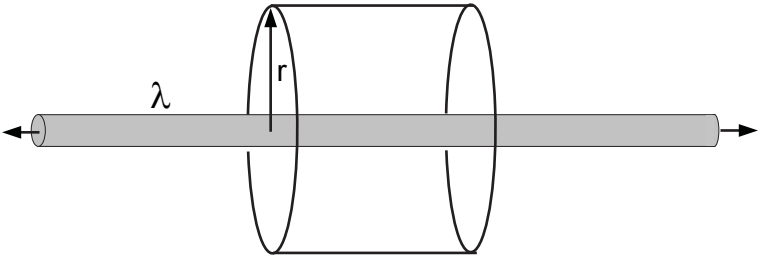
(a) $r = 5$ cm'de elektrik alanının değeri ne?

(b) Peki $r = 10$ cm'de elektrik alan değeri ne? Ya $r = 20$ cm için?

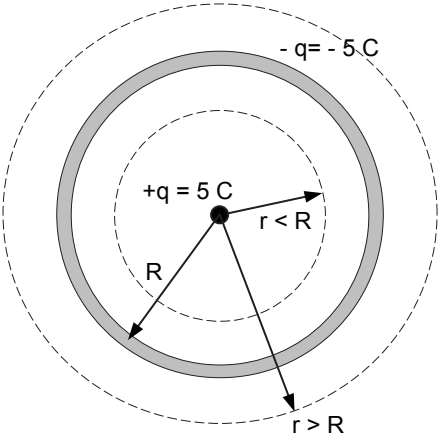
(c) $r = 0$'dan $r = 20$ cm değerine kadar elektrik alan $E(r)$'nin büyüklüğünün grafiğini çizin.

(d) $r = 0$ noktası için voltajı 0 volt olarak alın (bu noktaya "toprak" denir). Elektrik alanı $E(r)$'nin radyal yön boyunca integralini alarak herhangi bir r noktasında voltaj $V(r)$'yi bulun.

(e) $r = 0$'dan $r = 20$ cm'ye kadar voltaj $V(r)$ grafiğini çizin.



3. Şekilde görüldüğü gibi, sonsuz uzunlukta bir düz tel boyunca λ (lambda) $= -2$ C/m yük yoğunluğu var. Şekilde görülen kapalı silindirde Gauss Kanununu kullanarak telden r mesafesinde elektrik alanın büyüklüğünü ve yönünü bulun. $r = 1$ m için hesaplayın.

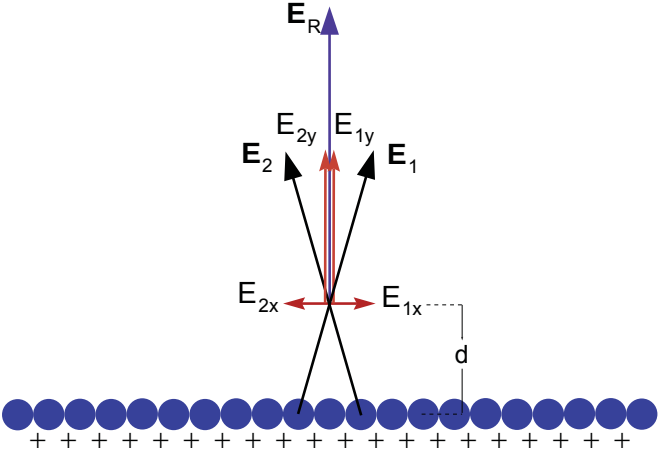


4. $q = +5$ C noktasal yükü, şekilde görüldüğü gibi 1 m yarıçapında, -5 C toplam yük taşıyan ince bir *iletken* küresel kabuğun merkezinde duruyor.

(a) Bir iletken üzerindeki yük, iletkenin dış yüzeyi üzerinde birim yüzey başına düzenli bir yük yoğunluğu ile yayılır. (Neden?) Küresel kabuk üzerindeki σ (sigma) yük yoğunluğu, C/m^2 birimiyle ne kadar?

(b) Merkez noktadan itibaren bütün r mesafeleri için $\mathbf{E}(r)$ elektrik alanının büyüklüğü ve yönü ne?

21
Paralel Levhalı Kapasitör



Şekil 21.1

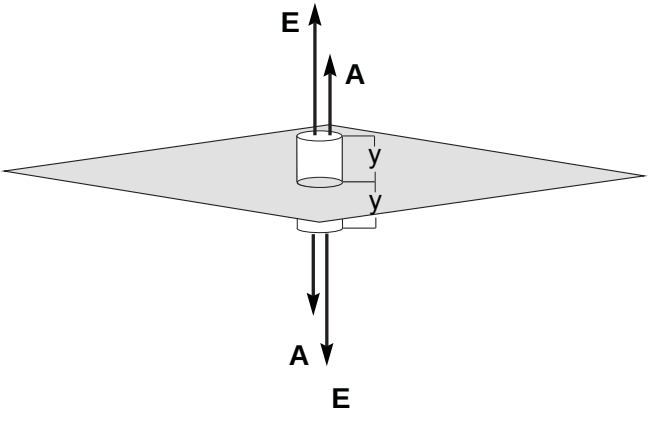
Bu bölümde biri (+), biri de (–) yük taşıyan, birbirine paralel iki levhanın oluşturduğu elektrik alanını inceleyeceğiz. Niye? Amacımız en basit, doğada ve teknolojide de raslanabilen bir simetrik geometrik yapı içinde Gauss Kanununu uygulamak ve simetrinin önemini görmek. Bu basit simetrik örnek, ileride tüm elektrik ve mıknatıslık kurallarını (Maxwell Kanunları) bir araya getirip elektromanyetik dalgaların nasıl oluştuğunu gördüğümüzde de işimize yarayacak.

Şekil 21.1'de düz bir çizgi üzerinde yükler var. Yüklerden oluşan bir düzlemin kesiti bu. Soru şu: *Bu yükler nasıl bir elektrik alanı kuruyor?*

Bu çizgi ve düzleme, sanki sonsuza kadar uzanıyorlarmış gibi yaklaşalım. Yaklaşımın anlamı basit: Elektrik alanının ölçüldüğü nokta çizgi veya düzleme yakın ama çizgi veya düzlemin uçları bu noktadan çok uzaklarda. Böyle bir nokta, sonsuz çizginin ya da düzlemin *ortasının* üstünde bir nokta gibi düşünülebilir:

Çizginin çok uzaktaki kısımlarının bu noktaya önemli bir katkısı yok, daha yakındaki kısımlar bakımından ise noktanın solunda kalan ne kadar yük varsa sağında da o kadar, önünde ne kadar yük varsa arkasında da o kadar yük var. Simetrik bir çift yükün, elektrik alanına katkısı Şekil 21.1'de $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{E}_2$ olarak gösteriliyor. Elektrik alanlarının çizgiye veya düzleme paralel olan bileşenleri ($\mathbf{E}_{1x}$ ve $\mathbf{E}_{2x}$) iptal oluyor, dik bileşenler ($\mathbf{E}_{1y}$ ve $\mathbf{E}_{2y}$) ise birbirine ekleniyor. Bütün yük öğesi çiftleri için bu işlemi yaparak görüyoruz ki net elektrik alanı, düzleme dik olmalı. Alanı hesap ettiğimiz nokta rasgele bir nokta, bu noktanın hiçbir özel tarafı yok. Simetri gereği, "*sonsuz*" düzlemin her yerinde, düzlemin üstünde ve altında, düzlemden uzaklığı düzlemin uçlarına olan uzaklıktan çok daha küçük olan bütün noktalarda elektrik alanının yönü düzleme diktir. Şimdi Gauss Kanununu (Denklem 20.3) kullanarak bu elektrik alanın büyüklüğünü hesaplayalım. Gauss Kanununu kullanarak düzlemden y mesafesindeki elektrik alanını bulmak için *her türlü* kapalı yüzey kullanılabilir. Akı hesabının kolay olacağı bir yüzey seçmek daha pratik.

En kolayı, kapalı yüzeyi oluşturan parçaları, elektrik alanının yüzeye ya dik ya paralel olacağı şekilde seçmek. Bunun için simetriden faydalanıyoruz. Elimizdeki örnek için kolay seçenek, üst ve alt yüzeyleri yüklü sonsuz düzleme paralel, yan yüzeyleri de bu düzleme dik olan bir silindir (veya prizma).



Şekil 21.2

Şekil 21.2'deki gibi, bir A yüzeyi yüklü düzleme paralel ve düzlemden y mesafe yukarıda, bir diğer paralel A yüzeyi de düzlemden y mesafe aşağıda olan bir kapalı yüzey oluşturun. Bu iki düzlem yüzey, elimizdeki kapalı yüzeyin üstü ve altı oluyor, yüzeyi kapatan yan yüzler ise yüklü düzleme dik. Üstte ve altta elektrik alan akısı pozitif ve EA'ya eşit, burada E, elektrik alanının büyüklüğü, zira elektrik alan bu yüzeylere dik, dS'ye paralel. Yan yüzlerde elektrik akısı sıfır, çünkü elekt-

rik alan, yüklü düzleme dik olduğu için bu yan yüzlere paralel. Böylece kapalı yüzeyden geçen toplam akı:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = 2EA \tag{21.1}$$

Farz edelim ki düzlemin yüzey yük yogunluğu (alan başına yük) σ olsun. Gauss Kanununa göre, yukarıda bulduğumuz toplam akı, sabit $1/\epsilon_0$ kere düzlemin kapalı yüzey içinde kalan yüküne eşit olmalı,

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = 2EA = \frac{Q_{\text{kusatan}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{21.2}$$

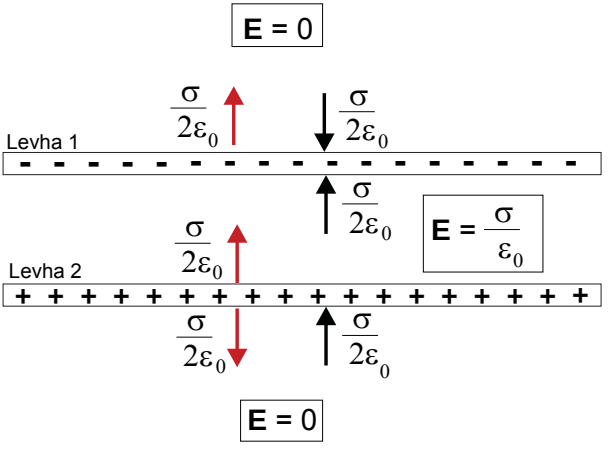
ve böylece,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{21.3}$$

İşte bu, "sonsuz" bir pozitif yük düzleminden kaynaklanan düzenli elektrik alanının büyüklüğüdür. Alan, yüklü düzleme dik, ve düzlemden uzağı işaret eder doğrultuda. Alan, y'ye bağlı olmadığı için, yüklü düzlemin iki tarafında da, bütün noktalarda aynı değerde.

Pozitif veya negatif yük, ya da birbirinden ayrı olarak hem pozitif hem negatif yük taşıyabilen bütün sistemlere *kapasitör* ya da *sığa* denir.

Şimdi bir kapasitör düşünün, biri pozitif yük diğeri negatif yük taşıyan birbirine paralel bir çift iletken levha düzlemden oluşsun. (Şekil 21.3'e bakın).



Sağdaki elektrik alanını **Levha 1** oluşturuyor.
Soldaki elektrik alanını **Levha 2** oluşturuyor.
Her iki levha da çok büyük.

Şekil 21.3

Negatif yüklü levhadan kaynaklanan alan, düzenli bir alan ve negatif yüklü levhaya dik olup iki taraftan da *levhaya doğru* yönelen bir alandır. Pozitif yüklü levhadan kaynaklanan alan da düzenli ve levhaya dik bir alandır, ama iki taraftan da *levhadan uzağa* doğru yönelir.

Coulomb Kanununu ve Gauss Kanununu işlerken gördüğümüz üzere, farklı yüklerden kaynaklanan toplam elektrik alan, tek tek yüklerin katkısıyla oluşan elektrik alanların toplamıdır. Bu "*süperpozisyon ilkesi*"nin işlemesinin nedeni, her tür yükün elektrik alanının gayet basit bir şekilde yükle orantılı ("yükte *doğrusal*") olması, q^3 gibi, $1/q^5$ gibi doğrusal olmayan bir yük fonksiyonu OLMAMASIDIR.

Pozitif yüklü levha ile negatif yüklü levhanın alanları *toplanır*, toplam elektrik alan her iki elektrik alan katkısını toplayarak bulunur. Kapasitörün dışındaki toplam alan sıfırdır. Paralel levhaların arasında, elektrik alan vektörü, kapasitör levhalarına dik doğrultuda, pozitif yüklü levhaya ters yönde, negatif yüklü levhaya doğru yönleniyor. Her bir levhanın tek başına yaptığı elektrik alanı $E = \sigma/2\epsilon_0$ eşitliğini sağladığı için, toplam elektrik alanın büyüklüğü,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{21.4}$$

Levhaların arasındaki voltaj farkı, negatif levhadan pozitif levhaya doğru elektrik alanın integralidir. Elimizdeki örnekte elektrik alan sabittir, eğer levhaların arasındaki uzaklık D ise, voltaj farkı şöyle olur:

$$V = ED = \frac{\sigma}{\epsilon_0} D = \frac{QD}{\epsilon_0 A}. \equiv \frac{Q}{C} \tag{21.5}$$

Elektrik alanlar kaynak yük Q'ya doğrusal orantılı olduğu için voltajlar da kaynak yüklerle orantılıdır. Orantı sabiti $1/C$ olarak tanımlanır, burada C ile gösterilen *sığa (kapasitans)*, sistemin geometrisine bağlıdır. Sığayı gösteren C'yi Coulomb biriminin kısaltması olarak kullanılan C ile karıştırmamaya dikkat edin.

Elimizdeki örnekte, paralel levhalı kapasitörde,

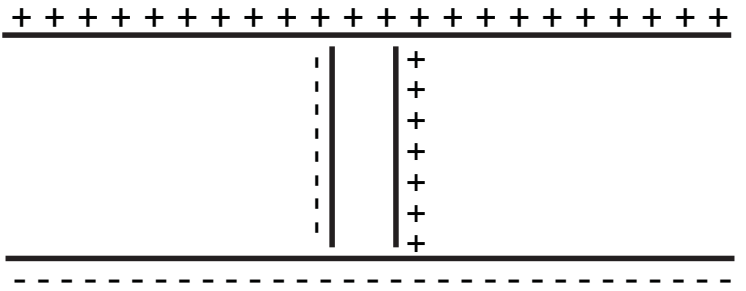
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{D} \tag{21.6}$$

Sığanın SI birimi *Farad*'dır; 19. yüzyılın büyük fizikçisi Michael Faraday'in onuruna, bu birime Farad adı verilmiştir.

$$1 \text{ Farad } (F) \equiv 1 \text{ Coulomb/Volt} = 1 \text{ (Coulomb)}^2\text{/Joule}$$

PROBLEMLER

1. Paralel levhalı bir kapasitörün daire şeklindeki levhalarının yarıçapı R, levhaların arasındaki mesafe ise $D \ll R$. Kapasitörün merkez ekseninden geçen bir düzlemde kesitini çizin. Bu kesit resminde iki levha, birbirine paralel ve $2R$ uzunluğunda iki çizgi olarak görünür. Çiziminizde kapasitörün en iç kısmında uçlardan uzaktaki elektrik alan çizgileri ile, uçlara yakın yerlerdeki çizgileri gösterin.



2. Paralel levhalı iki kapasitör şekilde görüldüğü gibi birbirinin içine konmuş. Levhalar birbirine değmiyor. Elektrik alan çizgilerini çizin.

3. Paralel levhalı bir kapasitörün yüzey alanı $A = 100\ \text{mm}^2$, aradaki mesafe ise $D = 3$ mm. Levhalarda +0,01 Coulomb ve −0,01 Coulomb yük var. $\epsilon_0 \cong 9 \times 10^{-12}\ \text{Coulomb}^2\ \text{m}^{-2}\ \text{N}^{-1}$ kabul edin.

   (a) Sığa değeri C, Farad birimiyle ne kadar?

   (b) Yük yoğunluğu σ ne kadar?

   (c) Uçlardan uzakta, kapasitör levhaları arasındaki elektrik alanın büyüklüğü ne kadar?

   Levhalar arasındaki voltaj farkı ne kadar?

4. Alanı A olan paralel levhalı bir kapasitör, $+\sigma$ ve $-\sigma$ yüzey yük yoğunluğuna sahip, arada d mesafesi var. d mesafesi artarsa, aşağıdaki değerler nasıl değişir:

   (a) Sığa C?

   (b) Voltaj farkı V?

   (c) Levhalar üstündeki yük, Q?

   (d) Levhalar arasındaki elektrik alan E?

5. R yarıçaplı bir iletken kürenin toplam yükü Q olsun.
   (a) Kürenin dışında kalan, kürenin merkezinden $r > R$ uzaklığındaki bir noktada elektrik alanının büyüklüğü ve yönü ne kadar olur?
   (b) Kürenin yüzeyi ile çok uzaktaki, "sonsuzdaki" bir nokta arasında voltaj farkı ne kadar olur? $V(\infty) = 0$ kabul edin.
   (c) Bu yüklü kürenin sığası ne kadardır?

22

Manyetik Alanlar, Elektrik Akımları ve Ampère Kanunu

Hareket eden yükler manyetik alanlar oluşturur, manyetik alanlar da hareket eden yükleri etkiler.

22.1 MANYETİZMA

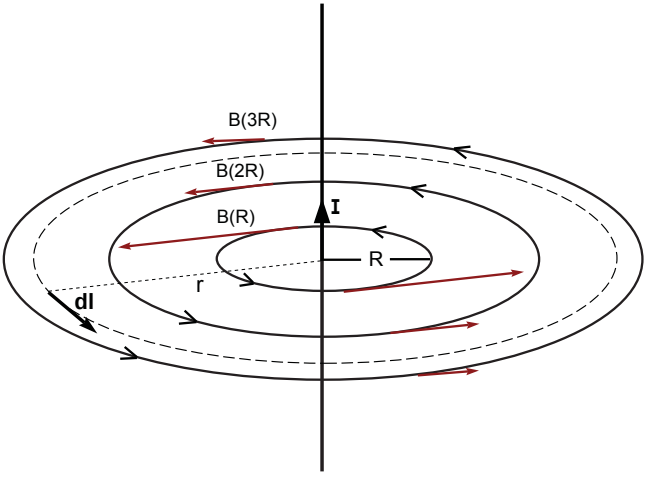
Manyetizma (mıknatıslık) Fe (demir), Ni (nikel) ve Co (kobalt) gibi bazı maddelerin (şimdi kullandığımız tabirle "*ferromanyetik*" maddelerin) bir özelliği olarak antik çağlardan beri biliniyor. Manyetik nesnelerin "*kutupları*" var, öyle ki iki nesne arasındaki manyetik kuvvet kutuplarının yönüne bağlı. Dünya'nın da, pusulaları kuzey-güney yönüne çeviren bir manyetik alanı olduğu eski zamanlardan beri biliniyor. Pusulaların ibresi Dünya'nın manyetik kutuplarını gösteriyor, bunlar da coğrafi kuzey ve güney kutupların tam üzerinde olmasa bile epey yakınında. Mıknatısların kutuplarının elektrik yükleri gibi (+) ve (–) diye değil de kuzey ve güney diye gösterilmesinin nedeni de bu.

Dünya'nın mıknatıslığı ve manyetik maddeler üstüne ilk sistemli ampirik araştırmalar Rönesans zamanında, özellikle William Gilbert'ın çalışmalarıyla başladı. Elektrik ve manyetizma olaylarının birbiriyle alakası olmadığı zannediliyordu, ta ki deneyler hareket eden elektrik yüklerinin (*akımların*) manyetik alan kaynağı olduğunu, buna karşılık manyetik alanların da hareketli elektrik yüklerini (akımları) etkilediğini gösterene kadar. 18. yüzyılın sonuyla 19. yüzyılın başında yapılan bu deneyler sayesinde elektrik olayları ve manyetik olayların birbirinden bağımsız olmadığı, bilakis birbirleriyle iç içe oldukları fark edildi. Yükler, akımlar, elektrik ve manyetik alanlar arasındaki etkileşimlerin tam olarak anlaşılması, 19. yüzyılda fizikte gösterilen en büyük başarılardan biri oldu. Ampère'in, Faraday'in ve daha birçok insanın çalışmalarıyla açılan bu alanda, Maxwell'in elektrik ve manyetizma teorilerinin sentezini sağlaması ile zirveye ulaşıldı. 19. yüzyılda bilimdeki diğer büyük başarılar, fizikte enerjinin korunumunun ve termodinamik kurallarının anlaşılması ve biyolojide Darwin'in evrim teorisi idi.

22.2 AKIMLAR MANYETİK ALANLAR OLUŞTURUR: AMPÈRE KANUNU

Hareket eden elektrik yükleri yani *akımlar* manyetik alan oluşturur. Genellikle I ile gösterilen akım, mesela bir telin kesitinden birim zamanda geçen yük miktarıdır. Akımın SI birimi *Amper*'dir, bu da A diye kısaltılır. 1 Amper, saniyede 1 Coulomb yüklük bir akımı tanımlar: 1 A = 1 C/s. Bu birimin adı, akımlar ile manyetik alanlar arasındaki ilişkinin araştırılmasının öncüsü olan bilim insanı André-Marie Ampère'den geliyor.

Herhangi bir alandan, diyelim havadaki ya da plazmadaki bir halkanın içindeki alandan geçen akım, birim zaman içinde o alandan geçen toplam yük miktarından ibarettir. Bununla ilişkili bir başka kavram, genellikle **j** vektörüyle gösterilen *akım yoğunluğu*, birim alandan birim zamanda geçen yük miktarıdır. Birim hacim başına n yük taşıyıcı varsa, bunların her biri q yükü taşıyıp **v** hızıyla hareket ediyorsa, **v**'ye dik olan birim alan yüzeyinden geçen yük yoğunluğu $\mathbf{j} = n\,q\,\mathbf{v}$ olur (2. Probleme bakın). Yüzey alanı **dS** olan bir yüzey öğesinden geçen toplam akım da $\mathbf{j} \cdot \mathbf{dS}$'dir.



Şekil 22.1

Şekil 22.1'de *akım* taşıyan bir tel görüyorsunuz. Bu akım bir manyetik alan oluşturuyor. Deneyler bize bu manyetik alanla ilgili şunları söylüyor:

Simetriden dolayı, telden mesafesi birbiriyle aynı olan her bir noktada aynı büyüklükte manyetik alanlar ölçülür.

1. Manyetik alan B'nin yönü, gösterilen dairelere teğettir, manyetik alan telin etrafında dolanır. Geleneksel olarak, manyetik alanın yönü, basit bir çubuk mıknatısın çevresindeki manyetik alan için kuzeyden güneye doğru diye tanımlanır. Bu tanımı elimizdeki örneğe uygulayacak olursak, akımın yönüne göre manyetik alanın dolanma şeklinin sağ el kuralına uyduğunu görürüz: Sağ elinizin başparmağını akım yönünde tutarsanız, sağ elinizin diğer parmakları manyetik alanın dolanma yönünü gosterir. Akım öbür yöne doğru akarsa manyetik alanın yönü de tersine döner.
2. Manyetik alanın gücü, telden mesafe r arttıkça bununla ters orantılı olacak şekilde azalır: $B(r) \propto r^{-1}$.
3. Manyetik alanın gücü, akımın büyüklüğüyle doğru orantılıdır: $B(r) \propto I$.

Bu gözlemleri bir araya getirerek görüyoruz ki, manyetik alanın gücü şöyle bulunuyor:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{22.1}$$

Manyetik alanın yönü, akımın yönüne göre sağ el kuralıyla bulunur. Ampère Kanununun en basit halidir bu; akım taşıyan "sonsuz" uzunlukta düz tel örneğindeki gayet simetrik durumu anlatır. Orantı sabitinin paydasına 2π konmasının amacı daha sonra gelecek denklemleri basitleştirmektir. Sabit μ_0'ya "*boşluğun geçirgenliği*" denir. SI birim sisteminde μ_0'ın değeri:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ kg\ m\ C^{-2}.$$

Ampère Kanunu, manyetik alan ile o manyetik alanın kaynağı olan akım arasındaki ilişkiyi ifade eder. Ampère ve başkalarının yaptığı deneylerle 19. yüzyılın ilk yarısında gösterilen biçimiyle, Ampère Kanununun *integral şeklinde* ifade edilen en genel hali şöyle:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I_i \quad \text{[Ampere Kanunu]} \tag{22.2}$$

Burada dl, akımı çevreleyen kapalı bir halka boyunca alınan bir adımı ifade ediyor. Kapalı yol üzerindeki her bir noktada dl, bu yola teğet yönde ve *dl* büyüklüğünde bir vektördür, *dl* de o noktada yol üzerindeki adımın çok kısacık uzunluğudur. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{dl}$, manyetik alanın yola teğet olan bileşeni kere *dl* adımıdır. Kapalı bir halka üzerinde alınan integral, integral işaretinin üstüne küçük bir daire konarak gösterilir. Ampère Kanunu der ki, I akımının çevresindeki bir daire (ya da başka herhangi bir kapalı halka) üzerinde alınan $\mathbf{B} \cdot \mathbf{dl}$ integrali, bu halkanın çevrelediği yüzeyden geçen akımın değerini verir. Kapalı halka integrali, yol boyunca (**dl** adımları

boyunca) **B** bileşenlerini birbirine eklemektir. Bu integralden çıkan sonucun sıfır olmaması, manyetik alanda net bir *dolanma* olduğu anlamına gelir: Manyetik alan çizgileri halkayı tam olarak izlemiyor olabilir, ama alan çizgilerinin bir bileşeni halka boyunca ve halka etrafında dolanıyordur.

"*Sonsuz*" bir düz telden *r* mesafedeki bir noktada manyetik alanı bulmak için Denklem 22.2'yi kullanalım. Sonsuz bir tel olduğunu varsaymak, telin uzunluğu *L*'nin, noktanın telden uzaklığı *r*'den çok daha fazla, $L \gg r$ olduğu, ayrıca noktanın telin uçlarına da uzak olduğu gerçek bir durum için uygun bir yaklaşımdır. Sonsuz düz telde, tele dik olan ve teli merkez alan bir düzlem üzerindeki bir dairenin üstünde bütün noktalar simetrik ve birbirine eşdeğer konumda noktalar olur. Ampère Kanununu kolayca ve doğrudan kullanmak için, Şekil 22.1'deki kesik çizgili daire gibi teli merkezine alan, *r* yarıçaplı bir daire seçmek en rahatı. Deneyler, manyetik alanın bu daireye teğet olduğunu gösteriyor. Simetriden dolayı, manyetik alanın büyüklüğü dairenin üzerindeki bütün noktalarda aynı.

Denklem 22.2'yi kullanarak, sonsuz bir düz telden *r* mesafesindeki manyetik alan gibi basit bir örnekte bu genel ifadenin nasıl işlediğini görebiliriz şimdi. Teli merkez alan daire boyunca manyetik alanın büyüklüğü değişmediği ve alanın yönü de her noktada daireye teğet olduğu için,

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \oint B(r)dl = B \oint dl = B\, 2\pi r. \tag{22.3}$$

Denklem 22.2'nin sağ tarafı, I_i, *seçilen* halkanın içine aldığı toplam akım. Halkanın içine aldığı akım da zaten telden geçen akım, *I*. Manyetik alanın büyüklüğünün

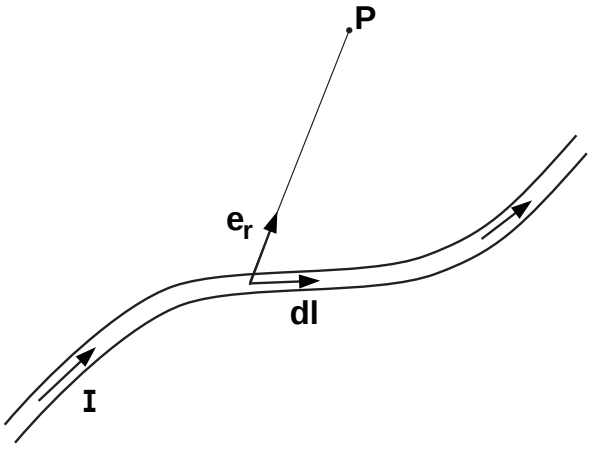
$$B(r) = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi r}, \tag{22.4}$$

olduğunu buluyoruz, tıpkı daha önce formülde verildiği gibi. Ampère Kanunu bütün kapalı halkalar için geçerli, fakat bu kanunu kullanmak sonsuz düz tel örneği gibi simetrinin olduğu durumlarda faydalı ve pratik oluyor sadece. Ampère Kanununun genel olarak geçerli olduğunu, teli içine alan bütün kapalı yüzeyler için doğru olduğunu ispatlamak için, daire örneğinde geçerli oluşunu kullanarak dairenin şeklini bozup rasgele bir kapalı halkaya çevirmek ve bu değişikliğin **B · dl** integralinin değerini değiştirmediğini göstermek mümkün (3. Probleme bakın).

22.3 * AKIM PARÇALARININ MANYETİK ALANA KATKISI: BİOT-SAVART KURALI

Gauss Kanunu gibi Ampère Kanunu da alanın *her yerdeki* dağılımını alanın kaynaklarıyla ilişkilendiriyor. Gauss Kanununda elektrik alanın bir integrali olan,

kapalı yüzeyden geçen akı, kapsanan toplam yükle ilişkilendiriliyor. Manyetik alanın kapalı bir halka boyunca integralini alan Ampère Kanununda*ysa dolanma*, halkanın içine aldığı toplam akımla ilişkilendiriliyor. Bu kanunların ikisi de, çok simetrik durumlarda özellikle faydalı ve kullanışlı. Eğer herhangi bir özel simetri göstermeyen bir akım dağılımı varsa, uzaydaki her *P* noktası için, her akım parçasının *P*'deki yerel manyetik alana katkısını bulmak gerekir (Şekil 22.2'ye



Şekil 22.2

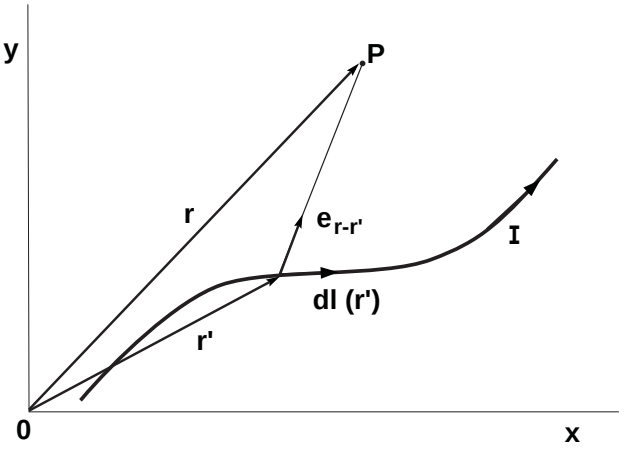
bakın). Bu değeri de, asimetrik akım dağılımı üzerine yapılan deneylerle bulunan Biot-Savart Kuralı verir:

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathbf{dl} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{22.5}$$

Denklem 22.5, kaynak akımın her bir *I***dl** parçasından kaynaklanan yerel manyetik alandaki **dB** katkısını verir. Biot-Savart Kuralı, tek tek nokta yüklerin yerel elektrik alana katkısını veren Coulomb Kanununun akım ve manyetik alanlar için eşdeğeridir. Manyetik alan akımla orantılı (akımda *doğrusal*) olduğu için burada da *süperpozisyon ilkesi* geçerlidir:

> Herhangi bir P noktasındaki toplam alan, kaynak akım *I***dl**'nin her zerresinin yaptığı **dB** katkılarını toplayarak (integralini alarak) bulunur:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(\mathbf{r}')\mathbf{dl}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \tag{22.6}$$



Şekil 22.3

Burada **r**, manyetik alanın ölçüldüğü *P* noktasının vektör konumunu, **r**′ ise Şekil 22.3'de görüldüğü gibi, kaynak akımların $I(\mathbf{r}')\mathbf{dl}(\mathbf{r}')$ parçalarının bulunduğu değişken noktayı gösteriyor. **r**′ üstünden integral almak, başka başka bütün **r**′ noktalarında bulunan bütün akım parçalarının katkılarının toplamını veriyor. Dikkat ederseniz, **r**′ noktasından $\mathbf{dl}(\mathbf{r}')$ yönünde geçen $I(\mathbf{r}')$ akımı, **r**′ noktasından geçen anlık akım $dq(\mathbf{r}')$ cinsinden de ifade edilebiliyor:

$$I(\mathbf{r}')\mathbf{dl}(\mathbf{r}') = \frac{dq(\mathbf{r}')}{dt}\,\mathbf{dl}(\mathbf{r}') = \mathbf{v}(\mathbf{r}')dq(\mathbf{r}') \tag{22.7}$$

Burada $\mathrm{v}(\mathbf{r}')$ ile gösterilen, $dq(\mathbf{r}')$ yüklerinin anlık hızlarıdır. Biot-Savart integrali şöyle de yazılabilir:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\mathbf{v}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}]dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \tag{22.8}$$

22.4 MANYETİK ALANIN ELEKTRİK AKIMLARINA ETKİSİ: LORENTZ KUVVETİ

Hareket eden elektrik yüklerinin ve elektrik akımlarının manyetik alanların kaynağı olduğunu gördük. *Manyetik alanların da elektrik yükleri üstünde etkisi var mı?* Hareketsiz bir elektrik yükünü bir manyetik alana koyun. Hiçbir şey olmaz; yük durduğu yerde kalır. *Manyetik alanda hareketsiz duran bir yük üzerinde hiçbir kuvvet etki etmez.* Şimdi bu yükü **v** hızıyla, uzayın manyetik alanın olduğu bir bölgesine atalım. Bu sefer yük ivmeleniyor. En yüksek ivme, **v** hızının manyetik

alana dik olduğu zaman oluyor. Eğer hız manyetik alana paralelse hiç ivme olmuyor. Bu deneyler, uzayda manyetik alan değerinin **B** olduğu bir noktadan **v** anlık hızıyla geçen bir q yükü üzerindeki kuvvetin

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{22.9}$$

olduğunu gösteriyor. Eğer burada bir de elektrik alan **E** varsa, toplam kuvvet şöyle oluyor:

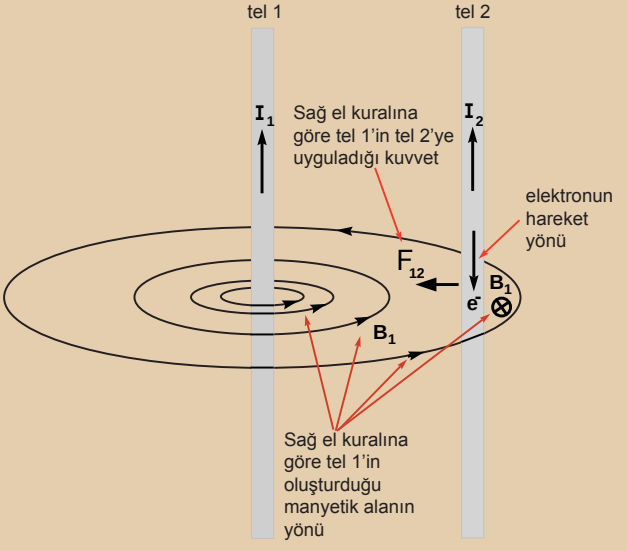
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{22.10}$$

Buna *Lorentz Kuvveti* deniyor. Bu kuvvetin biçimi, Nicola Tesla'nın onuruna *Tesla* adı verilen SI manyetik alan birimini belirliyor: 1 Tesla ≡ 1 kg $s^{-1}C^{-1}$.
(11. Probleme bakın.)

Akım Taşıyan Bir Tel Üzerindeki Kuvvet

Aşağıdaki resimde gördüğünüz gibi, akım taşıyan iki tel düşünün. Elimizde şu bilgiler var:

- Akım, yüklü parçacıklarla taşınır, akım taşıyan bir telde bu parcacıklar elektronlardır.



- Akımın yönü, elektronların hareket yönünün tersi olarak tanımlanır (bir başka deyişle, akımın yönü, pozitif yük taşıyanların hareket yönü olarak tanımlanır).
- Ampère Kanununa göre, akım taşıyan bir tel çevresinde bir manyetik alan oluşturur.

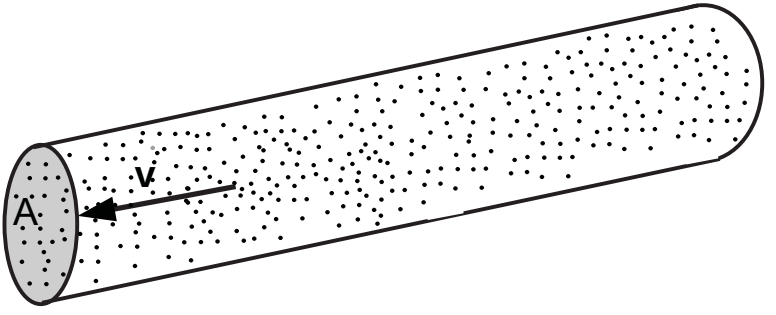
Telin oluşturduğu manyetik alan, yüklü parçacıklar üzerinde kuvvet uyguladığından ve akım taşıyan her telde yüklü parçacıkların toplu hareketi söz konusu olduğundan, *bu iki tel de birbirine kuvvet uyguluyor olmalıdır*.

Yukarıdaki şekilde tel 1'in oluşturduğu manyetik alan gösteriliyor. Tel 2'de de elektronların şeklin alt kısmına doğru giden toplu hareketi var. Bu elektronlar üzerinde tel 1'in manyetik alanından dolayı Lorentz kuvveti etki ediyor. Bu kuvvetin yönü tel 1'e doğru, *tel 2, tel 1'e doğru çekiliyor.* Bunun gibi, tel 2 de çevresinde bir manyetik alan kuruyor ve tel 1'deki elektronların toplu hareketi bu manyetik alandan etkileniyor. Bu kuvvetin yönü tel 2'ye doğru.

Bu iki tel birbirine doğru çekiliyor...

PROBLEMLER

1. Bir çubuk mıknatısın (manyetik dipol) manyetik alanın desenini çizin. Çubuk mıknatısın dışındaki manyetik alan yönü geleneksel olarak kuzey kutbundan güney kutbuna doğru alınır. Bu manyetik alan deseni, 19. Bölümde elektrik dipolün etrafındaki elektrik alanın deseniyle aynı.



2. Şekilde birim hacimde $n = N/V$ kadar yük taşıyıcı içeren bir gaz görülüyor. Bu taşıyıcıların her biri q yük taşıyıp **v** ortalama hızıyla hareket ediyorlar. Parçacıklar metal bir telden akan elektronlar da olabilir, bir çözeltide ya da plazmada bulunan iyonlar da. Şekildeki gibi, **v**'ye paralel bir A alanını ele alın.

   (a) A'ya vt mesafesinden daha yakın olan bütün yük taşıyıcılar bir t zaman aralığı içinde A yüzeyine varıp oradan geçecekler. Böyle kaç tane taşıyıcı var ve t süresinde A'dan geçecek toplam Q yükü ne kadar?

   (b) A'dan geçen akım $I = Q/t$ ne kadar?

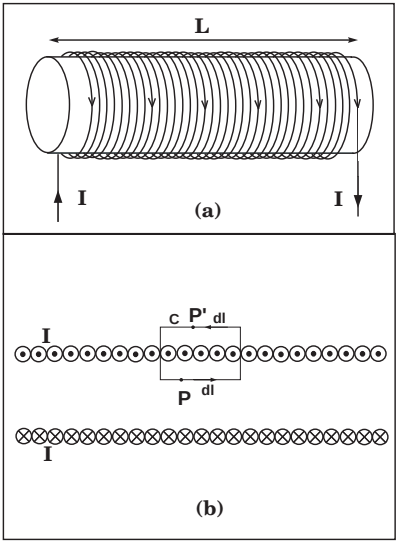
(c) Yük yoğunluğunun büyüklüğü $j = I/A$ ne? **j**, pozitif yüklü parçacıklar için ortalama parçacık hızı **v** ile aynı yönde.

3. I akımını taşıyan sonsuz bir düz telin çevresinde, rasgele herhangi bir şekle sahip bir kapalı eğri olsun.
   (a) Herhangi bir şekildeki bu kapalı eğriyi, merkezi tel olan mini mini dairesel yaylardan ve radyal doğru parçalarından yapabilir misiniz?
   (a) Bu kapalı eğri üzerindeki $\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl}$ dolanmasının, teli merkez alan her dairesel halkayla aynı olduğunu gösterin.

4. Çok uzun iki paralel telin arasında 10 cm mesafe var, tellerin her biri aynı yönde akan 1 Amper akım taşıyor. Bir resim çizin ve tellerin iki yanında 1 cm, 2 cm ve 5 cm mesafede manyetik alanın büyüklüğünü ve yönünü bulun.

5. * I akımı taşıyan sonsuz bir düz tel düşünün. Biot-Savart Kuralını kullanarak telden R mesafedeki bir noktada manyetik alan B'yi bulun. B için bulduğunuz büyüklük ve yön, Ampère Kanununun daha basit ve doğrudan şekilde verdiği sonuçla aynı olmalı.

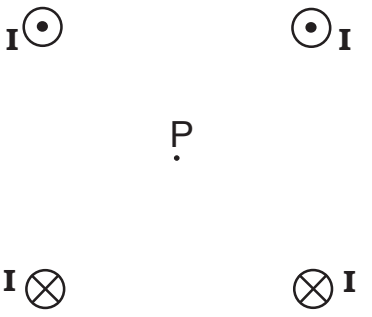
6. **Sarmal bobin:** Şekilde L uzunluğunda bir silindir görülüyor. Bu silindirin etrafına I akımını taşıyan bir tel N defa dolanmış, birim uzunluk başına $n \equiv N/L$ dolanma düşüyor. Böyle bir düzenlemeye "*sarmal bobin*" *(solenoid)* denir. Şekilde sarmal bobinin ekseninden geçen bir düzlem üzerinde sarmal bobinin kesiti görülüyor. Burada ⊗ ve ⊙ işaretleri akımın yönünün sırasıyla sayfanın içine doğru ve sayfadan dışarı doğru olduğunu gösteriyor.



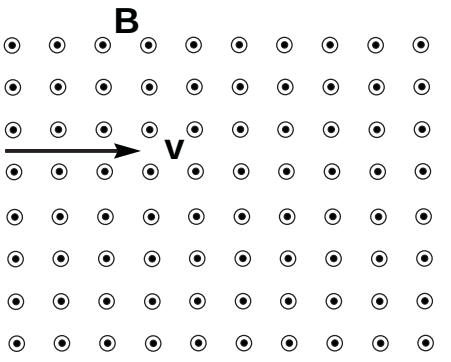
(a) P gibi sarmal bobinin içinde ve sarmal bobinin uçlarından uzakta bulunan bir noktadaki toplam manyetik alanın yönü nedir?

(b) Deneyler, P' gibi sarmal bobinin dışında ve uçlarından uzakta bulunan bir noktada manyetik alanın sıfır olduğunu gösteriyor. Şekildeki C dikdörtgeni üzerinde Ampère Kanununu, manyetik alanın yönü içinse simetri tezlerini kullanarak, çok uzun ("sonsuz") bir sarmal bobinin içindeki bir P noktası için manyetik alanın büyüklüğünü bulun. Bu sonuç, P noktasının bobinin içinde nerede olduğuna bağlı olarak değişiyor mu?

7. Şekildeki gibi bir akım düzeneğimiz var. Hepsi de sonsuz uzunlukta ve sayfaya dik olan dört telin akımlarının da aynı I olduğunu farz edin. Ampère Kanununu kullanarak karenin merkezindeki P noktasında manyetik alanın yönünü bulun. Burada ve akımın yönünün sırasıyla sayfanın içine doğru ve sayfadan dışarı doğru olduğunu gösteriyor.



8. $q > 0$ yüküne sahip bir parçacık, manyetik alanın düzgün olduğu bir bölgede, şekilde görüldüğü gibi **B**'ye dik **v** hızıyla hareket ediyor.



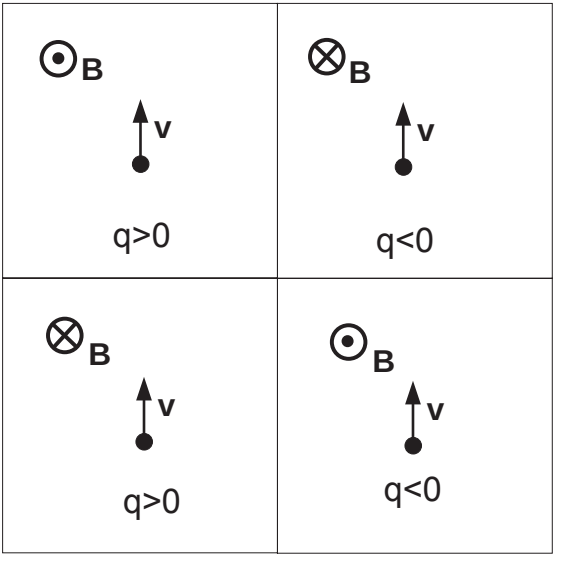
(a) Parçacığa etki eden kuvvetin yönünü gösterin.

(b) Yükün bir daireyi takip ettiği gözleniyor. Neden?

(c) Parçacığın kütlesi m ise dairenin yarıçapı r'yi bulun.

9. m kütlesine ve q yüküne sahip bir parçacık, **v** başlangıç hızıyla, **B** düzenli manyetik alanının olduğu bir bölgeye giriyor. Hız **v** manyetik alana dik de değil paralel de değil, aralarında θ açısı var. Yükün izlediği yol nasıl?

10. Şekilde görülen durumlar için manyetik kuvvetin yönünü bulun. Burada ⊗ ve

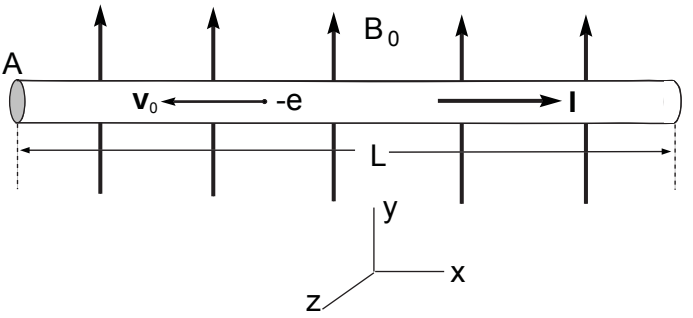


⊙ işaretleri manyetik alanın yönünün sırasıyla sayfanın içine doğru ve sayfadan dışarı doğru (size doğru) olduğunu gösteriyor.

11. Lorentz Kuvveti, Denklem 22.10, manyetik alan B'nin boyutlarını ve birimlerini kütle, uzunluk, zaman ve yük temel boyutlarıyla ve bunlara ait SI birimleriyle veriyor. **B**'nin Ampère Kanununun basit haliyle bulduğunuz birim ve boyutunu ve Denklem 22.2'yi kullanarak orantı sabiti $\mu 0$'ın boyutlarını ve SI birimini bulun.

12. Elektrik ve mıknatıs alanları altında serbest hareket (toplam kuvvet = 0): m kütlesine ve q yüküne sahip bir parçacık, **E** düzgün elektrik alanının ve **B** düzgün manyetik alanının olduğu bir bölgede **v** sabit hızıyla hareket ediyor. **E**, **v** ve **B** arasındaki ilişki nedir?

13. L uzunluğunda, kesitinin alanı A olan ve I yükünü taşıyan düz bir tel, $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathrm{j}}$ düzgün manyetik alanına konuyor. Akım, $-e$ yükünde, $\langle \mathrm{v} \rangle = v_0\hat{\mathrm{i}}$ ortalama hızıyla hareket eden elektronlar tarafından taşınıyor (Şekil 22.4). Akıma katkıda bulunan elektronların sayı yoğunluğu (birim hacim başına sayı) n'dir.



(a) I akımını, akım yoğunluğu $\mathbf{j} = nev_0\hat{\mathrm{i}}$ cinsinden ifade edin.

(b) Bu tel parçası üzerindeki toplam Lorentz kuvvetini bulun.

14 Aralarında D mesafesi bulunan birbirine paralel iki sonsuz düz telin her birinde birim uzunluk başına λ (C/m) kadar yük var. Yük taşıyıcılar teller boyunca v hızıyla hareket ediyor. İki telde yük akışının yönü aynı.

(a) Bu düzenlemenin bir resmini çizin.

(b) Tellerin her birinde akım I ne kadar?

(c) Tel 2'nin bulunduğu yerde tel 1'deki akımdan kaynaklanan $\mathbf{B}$ manyetik alanının büyüklüğü ve yönü ne?

(d) Tel 1'in tel 2'ye uyguladığı, birim uzunluk başına manyetik kuvvet $\mathbf{F}_{B,12}$ ne kadar?

(e) Tel 2'nin bulunduğu yerde, tel 1'deki yükten kaynaklanan $\mathbf{E}$ elektrik alanının büyüklüğü ve yönü ne?

(f) Tel 1'in tel 2'ye uyguladığı elektrik kuvvet $\mathbf{F}_{E,12}$ birim uzunluk başına ne kadar?

(g) Tel 1'in tel 2'ye uyguladığı toplam Lorentz kuvveti birim uzunluk başına ne kadar?

(h) Toplam Lorentz kuvveti sıfır olabilir mi? Hangi v taşıyıcı hızları için olabilir?

23
Elektrik ve Manyetik Dipolleri Kesmek

Elektrik yükleriyle yapılan ilk deneylerden beri, pozitif ve negatif yüklerin birbirinden ayrılabildiği gayet iyi biliniyor. Bunun aksine, iki tür manyetik kutbun ("Kuzey" ve "Güney") birbirinden ayrı görüldüğü hiç olmadı.

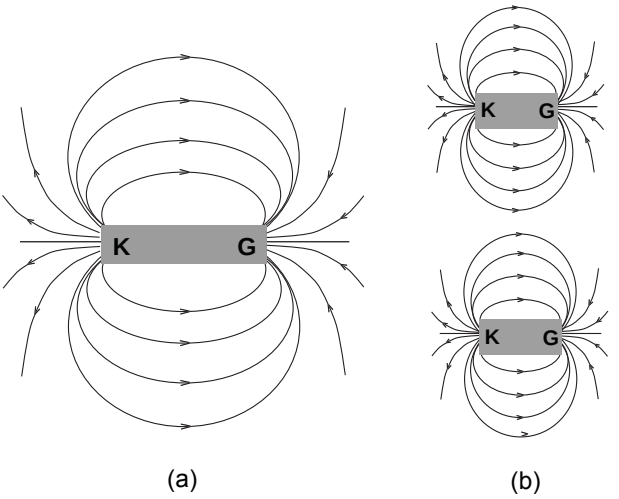
> Elektrik dipoldeki yükler birbirinden ayrılabilir. Manyetik dipolün kutupları birbirinden ayrılamaz.

Doğada yalıtılmış manyetik kuzey kutuplar veya yalıtılmış manyetik güney kutuplar yok. Şimdiye kadar yapılan hiçbir deneyde *manyetik monopol (tek kutuplu mıknatıs)* bulunamadı. En basit mıknatıs, bir ucu kuzey kutbu bir ucu güney kutbu olan çubuk mıknatıs. Bu bir *manyetik dipol*, yani çift kutuplu mıknatıs. Çubuk mıknatısı kırıp iki parçaya ayırmaya kalkınca, ayrı ayrı bir kuzey bir de güney kutbu değil de, kendileri de birer çubuk mıknatıs olup birer kuzey birer de güney uçları olan iki ayrı parça elde ediliyor, Şekil 23.1'de görüldüğü gibi.

Mıknatısı keserseniz her birinin kendi kuzey ve güney uçları olan iki ayrı mıknatıs elde edersiniz. Manyetik alanları manyetik yükler (monopoller) oluşturmaz. Doğada böyle bir şey yoktur.

Bir manyetik dipolün manyetik alan çizgileri kuzey kutbundan çıkıp güney kutbunda birleşir. Bu *dipol* manyetik alanın deseni basit bir deneyle, çubuk mıknatısın etrafına biraz demir tozu dökünce kolayca ortaya çıkar. Bu desen, 19.2. kısımda işlediğimiz elektrik dipol deseniyle aynıdır (Şekil 23.1'e bakın).

Manyetik dipollerin aksine, elektrik dipoller (+) ve (−) yüklü bileşenlerine ayrılabilirler. 19. Bölüm'de gördüğümüz gibi, elektrik dipol biri pozitif öteki negatif olan bir çift yüktür; aralarındaki elektrostatik kuvveti bastıran bir kuvvetler birleşimiyle birbirlerinden ayrı tutulur bunlar. Biyomoleküller de dahil elektrik olarak nötr olan pek çok molekülün, bütün elektronlarının molekül içindeki dağı-



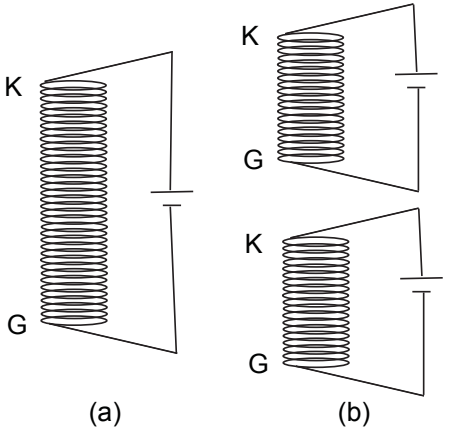
Şekil 23.1

lımından kaynaklanan dipol momentleri olur. Mesela, NaCl (sodyum klorür yani sofra tuzu) gibi, iki atom arasında iyonik bağın olduğu moleküllerde, atomlardan biri (Cl, klor) fazladan elektron yükü taşır, bu yük diğer atomun (Na, sodyum) 1 elektron kaybetmesiyle pozitif yükten ayrılmıştır. Bir başka örnek de dipol (çubuk) anten. Burada, antene gelen, zamana bağlı elektrik alanlarından oluşan sinyallerin yarattığı, yine zamana bağlı bir yük ayrışması olur. Elektrik dipollerin birbirinden ayrılması doğada sürekli olup duran bir şeydir. Sofra tuzu sodyum klorürü suda çözdüğünüz zaman elektrik dipol taşıyan molekülü, (−) yüklü klor ve (+) yüklü sodyum iyonları şeklinde parçalara ayırmış olursunuz. Bir atom iyonlaştığında veya iyonik bir molekül ayrıldığında, diyelim ki tuz suda çözüldüğünde, pozitif ve negatif yükler birbirinden ayrılır.

Çubuk mıknatıs veya *sarmal bobin* manyetik dipoldür. Tek başına bir mıknatıs kuzey ya da güney kutbuna hiç rastlanmadı. Sarmal bobin konusunu işlerken gördüğümüz gibi, manyetik alanlar elektrik yük akımları ile oluşur. Doğal mıknatıslar da, atom akımlarından ve elektronların *spin (dönü)* denen temel iç *manyetik dipol momentlerinden* oluşur. Tıpta kullanılan *Nükleer Manyetik Rezonans* (MR) teknolojisi, atom çekirdeklerinin manyetik dipollerine (spinlerine) dayanıyor. Yalıtılmış halde manyetik *monopol* bulunabileceğine dair hiçbir emare olmadığından, en küçük ve en basit manyetizma kaynağı dipoldür. En basit manyetik alan deseni de çubuk mıknatısın veya sarmal bobinin dipol alanıdır. Küresel simetrik monopol bir manyetik alan deseni görülmüş değildir.

Manyetik alanlar, manyetik yükle değil de elektrik akımlarıyla veya elektron

spinleri gibi mikroskobik manyetik dipollerle kurulduğundan, bir manyetik dipolü kesince iki ayrı dipol elde ediliyor. Şekil 23.2(a)'da, akım taşıyan teli keserek sarmal bobini ortadan ikiye ayırırsanız, kısa süre sonra artık kopmuş olan devreden akım geçmeyecek, manyetik alan da sıfır olacak. Eski bobinin iki yarısı ile sıfır olmayan bir manyetik alan elde etmek için, her iki tel parçasının kesik uçları, akım kaynağı bulunan bir devre üzerinden diğer ucuyla birleştirilmeli. Bunu yapınca da her birinin kendi kuzey ve güney kutupları olan iki ayrı sarmal bobin elde etmiş oluyoruz, Şekil 23.2 (b)'de gördüğümüz gibi.



Şekil 23.2

Doğada manyetik yük (monopol, yalıtılmış kuzey veya güney kutup) olmaması demek, manyetik alan için Gauss Kanununun sağ tarafının sıfır olması demektir.

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = 0 \tag{23.1}$$

Herhangi bir kapalı yüzeyden çıkan manyetik alanın toplam akısı sıfır. Maxwell denklemlerinden biri budur (26. Bölüm'e bakın). Söylemesi kolay olan bu denklem, elektrik yüklerinin ve akımlarının dağılımıyla kurulan olası elektromanyetik alan düzenlemelerine önemli bir kısıtlama getiriyor. Elektrik yükleri ve elektrik akımları varken bunların manyetik denkleri olmazsa, elektrik alanla manyetik alanın Maxwell Denklemlerindeki halleri arasında tam bir simetri olamaz. Fakat boşlukta, hiç yük ve akım bulunmayan yerlerde Maxwell Denklemleri elektrik alan ve manyetik alan için tamamen simetriktir; bu denklemlerde elektrik alan ve manyetik alanı birbirlerinin yerine koysanız denklemler değişmez.

PROBLEMLER

1. Bir sarmal bobin ortadan ikiye kesiliyor ve yeni yarım bobinlerin her birindeki teller akım kaynaklarına bağlanıyor. Oluşan iki yeni sarmal bobinin merkezleri arasında $D = 2{,}5\ L$ mesafe var, L de yeni bobinlerden her birinin uzunluğu.
   (a) Bir resim çizip yeni sarmal bobinlerin her biri için manyetik alan desenini gösterin.
   (b) İki yarım sarmal bobinin toplam manyetik alanının desenini çizin.
   (c) İlk baştaki $2L$ uzunluğundaki tek bobinin manyetik alan desenini çizin ve (b)'deki desenle karşılaştırın.

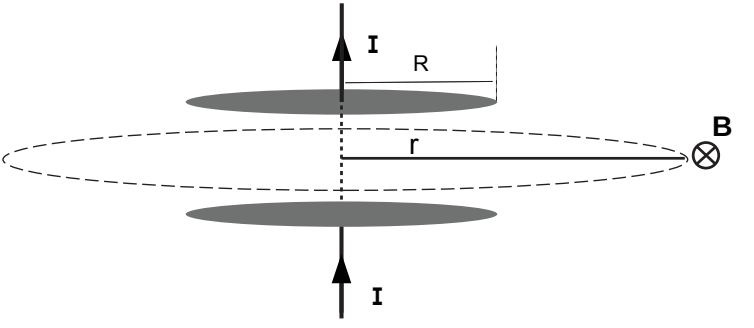
2. Elektrik ve manyetik monopolleri kıyaslayıp, her durumda kapalı yüzeyden akının ne kadar olduğunu görelim.
   (a) Bir elektrik dipolün (bir pozitif ve bir negatif yükü var) bütün uzaydaki elektrik alanı desenini çizin.
   (b) Yüklerden birini kapsayan, herhangi bir şekle sahip bir kapalı yüzey çizin.
   (c) Yüzeyden geçen alan çizgilerinin ok yönlerine bakın. Toplam akı dışarı doğru mu, içeri doğru mu yoksa ikisi birden mi?
   (d) Bir manyetik dipolün (kuzey ve güney kutupları var), kutupların arası da dahil olmak üzere bütün uzaydaki manyetik alan desenini çizin.
   (e) Kutuplardan birini kapsayan, herhangi bir şekle sahip bir kapalı yüzey çizin.
   (f) Yüzeyden geçen alan çizgilerinin ok yönlerine bakın. Toplam akı dışarı doğru mu, içeri doğru mu yoksa ikisi birden mi?

Elektrik monopolde (= tek yük), monopolün etrafında bir kapalı yüzeyden geçen akı sıfır olmaz. Fakat manyetik monopolde (= tek kutup), monopolü çevreleyen bir kapalı yüzeyden geçen akı iki yönde birbirini götürür, böylece toplam akı sıfır olur ($\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = 0$). Bunun nedeni manyetik "monopolün" aslında gerçekten yalıtılmış bir monopol olmamasıdır, bu her zaman bir dipolün parçasıdır.

24

Değişen Elektrik Alanlar Dolanan Manyetik Alanlar Yaratır: Sürülme Akımı

I akımını taşıyan sonsuz uzunlukta, düz bir tel olsun. Tel kesilirse, akımın olmadığı bir aralık oluşursa ne olur? Bu boşluğa kapasitör levhalarının Şekil 24.1'deki gibi yerleştirildiğini düşünün. Kapasitör levhaları arasında akım yok; hatta bunu vakumda yapalım, akımı taşıyacak herhangi bir madde de olmasın. Akım yine de aşağıdaki tel üzerinden alttaki levhaya gelir, onu pozitif yükle yükler, ve akım yine yukardaki telden çıkarak üstteki levhadan ayrılır, onu da negatif yükle yükler.



Şekil 24.1

Tel parçalarında akım olduğu için, telin etrafında dolanan manyetik alanlar vardır, Ampère Kanununa göre bunların eksenden *r* mesafesine bağlılığı da $1/r$ şeklindedir. Gelgelelim tam da aynı manyetik alanlar, kapasitör boşluğunun çevresinde, akımın hiç olmadığı yerde de ölçülüyor! Tel-kapasitör sistemine paralel olarak aşağı doğru indikçe, akım taşıyan telin çevresindeki bölgelerden akım olmayıp sadece kapasitör boşluğunun olduğu bölgelere doğru manyetik alanın uzayda devamlılığı olduğu görülüyor. Maxwell'in bu konuda deneylerle herhangi bir şey gösterilmeden önce fark ettiği gibi, Maxwell Denklemlerinin yapısından beklenen durum da böyle.

Deneyler, kapasitör levhalarının etrafında dolanan bir manyetik alan olduğunu gösteriyor.

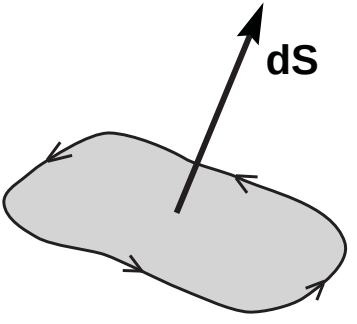
Peki manyetik alan çizgilerinin izlediği halkanın içindeki bölgede ne var? Manyetik alanın kaynağı ne? Kapasitör levhaları arasında bir elektrik alan var. Elektrik alanın büyüklüğü kapasitör levhaların üstündeki yükle orantılı. Şekil 24.1'deki gibi bir düzenlemede, akım taşıyan tellerin olması demek, iki kapasitör levhası üzerindeki pozitif ve negatif yükler akım $I = dQ/dt$ ile sürekli değişiyor demek. Bu da, kapasitör levhalarının arasındaki boşlukta *zamana bağlı* bir elektrik alan var demek. Zamana bağlı elektrik alanlar oldu mu, bunlar, hiç akım olmadığı zaman bile o çevrede dolanmada olan bir manyetik alan kuruyorlar. Oluşturulan dolanmalı manyetik alanın yönü, elektrik alanın arttığı yönün çevresinden *sağ el kuralına* uyuyor:

Sağ elinizin başparmağını elektrik alanın arttığı yönde açarsanız, sağ elinizin diğer parmaklarının kıvrıldığı yön manyetik alanın dolanma yönüdür. Oluşturulan manyetik alan, elektrik alanın artış yönünün çevresinde *saat yönünün tersine doğru* dolanıyor.

Ampère Kanunu şu şekilde genelleşiyor:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{dS} \quad \textbf{[Ampre Kanunu, Genel]} \qquad (24.1)$$

SI birimlerinde yeni terimin önündeki katsayı, Coulomb ve Gauss kanunlarının ϵ_0 sabitini ve Ampère Kanununun ilk terimindeki μ_0 sabitini içeriyor. Hatırlarsanız, "*zamana göre kısmi türev*" denen, $\partial/\partial t$ şeklindeki gösterim, *x, y, z* gibi başka değişkenleri göz ardı edip, sabit *x, y, z* vesaire ile zamana bağlı değişme oranını hesap edin, demektir. Bu yeni terimdeki integral ne anlama geliyor? İntegral, Denklem



Şekil 24.2

24.1'in sol tarafında, kapalı halkanın içinde kalan yüzey üzerinden alınıyor. Yüzey öğelerinde **dS**'nin yönü, kapalı halkadaki dolanma durumuyla, başka bir deyişle, halkayı takip ederek alınan **dl** adımlarının yönelimiyle birlikte tanımlanıyor.

Dolanma durumu, matematikte âdet olduğu üzere sağ el kuralına göre tanımlanıyor. Sağ elinizin başparmağını **dS** boyunca tutarsanız, halka üzerindeki çizgi öğeleri **dl** sağ elinizin parmakları yönünde olur (Şekil 24.2). Buna göre **dl**, **dS**'ye göre saat yönünün tersine doğru yönelmiş olmalıdır. **dl**'nin **dS**'ye göre *yöneliminin* bu tanımıyla, elektrik alanıyla manyetik alan arasındaki fiziksel ilişkiyi, deneylerden çıkarılan şekliyle ifade edebiliriz artık:

> Manyetik alan $\partial E/\partial t$ yönünün çevresinde sağ el kuralına uygun olarak dolanmaktadır.

Ampère Kanunundaki ikinci terim, Maxwell tarafından eklenen terim. Bu terim vakumlu ortamda elektrik alanıyla manyetik alanı dinamik olarak birbirine bağlıyor:

> Eğer *değişen* bir elektrik akısı varsa, elektrik akısının değiştiği bölgeyi çevreleyen kapalı halka üzerinde *dolanan* bir manyetik alan olur.

Bu etki Denklem 24.1'in son teriminde ifade ediliyor. Bu terim, 25. Bölümde işlenen *Faraday İndüksiyon Yasası*'nın benzeri. Bir tek, elektrik ve manyetik alanların rollerinin yeri değişmiş ve Ampère Kanununun ikinci teriminde artı işareti varken Faraday Kanununda bir eksi işareti var. Ampère ve Faraday Kanunlarının ikisinin birlikte sonucu, elektrik ve manyetik alanların vakumda bile (ve maddede de) dalgalar olarak yayılmasını gerektiriyor. Elektrik akısının zamanla değişme oranıyla orantılı

$$\epsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{dS}$$

niceliğine *sürülme akımı* ya da *deplasman akımı* deniyor. Sürülme akımı Ampère Kanununun genel haline tıpkı elektrik akımının girdiği gibi giriyor. Sürülme akımı da aynı elektrik akımı gibi dolanmalı manyetik alana kaynaklık ediyor.

PROBLEMLER

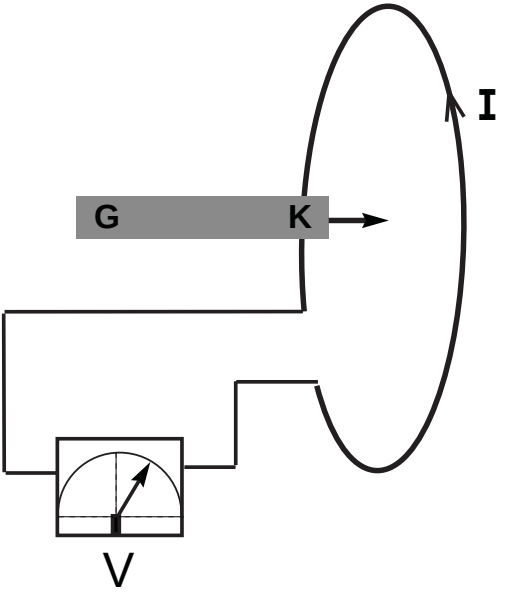
1. (a) Şekil 24.1'deki kapasitörün ekseninden $r < R$ uzaklıkta manyetik alanı hesaplayın.
   (b) Şekil 24.1'deki kapasitörün ekseninden $r > R$ uzaklıkta manyetik alanı hesaplayın.

Kapasitör levhalarının alanı $A = \pi R^2$. Kapasitör levhaları arasındaki elektrik alanının düzgün olduğunu ve eksenin yanındaki değere eşit değerde olduğunu farz edin. Levhaların arasındaki alan dışında elektrik alanının sıfır olduğunu farz edin.

2. Bu deneyi $\partial \mathbf{E}/\partial t$ ile öğrenci laboratuvarlarında yapmıyoruz. Niye acaba? Yapmaya kalksak nasıl olurdu?
   (a) Kapasitörün ekseninden 2 cm uzaklıkta Dünya'nın manyetik alanıyla kıyaslanabilir ölçüde bir manyetik alan yaratmak için ne kadar akım gerekir? Dünya'nın manyetik alanı $B_E \sim 4 \times 10^{-5}$ T.
   (b) Yukarıda (a)'da bulduğunuz akım, kapasitörü 1 s süresince yüklediğinde kapasitör levhalarının arasındaki voltaj farkı ne kadar olur hesaplayın.

3. $R = 1$ cm yarıçaplı dairesel bir paralel levhalı kapasitör, $f = 100$ Hz frekansla, zamana bağlı gerilim $V(t) = (10\ V) \sin(\omega t)$'ye bağlanıyor. Kapasitörün sığası $2{,}0\ \mu F$.
   (a) kapasitör üzerindeki $q(t)$ yükünü bulun.
   (b) kapasitörün içindeki I_d sürülme akımını bulun.
   (c) kapasitörün içindeki elektrik alan $E(t)$'yi bulun.
   (d) kapasitörün ekseninden r mesafe uzaklıkta, kapasitörün dışında, sürülme alanının kaynak olduğu manyetik alan $B(t)$'yi bulun.

25
Faraday'in İndüksiyon Yasası



Şekil 25.1

Şekil 25.1'de bir devre (telden bir halka) var, buna hiçbir voltaj kaynağı bağlı değil. Tellerde elektrik alan filan yok, elektronlara ivme kazandıracak hiçbir şey yok. Ve bir de mıknatısınız var. Mıknatıs tel halkaya göre durağan konumda ise manyetik alan deseni de sabit olur. Elektrik alan yok, manyetik alan **B** var.

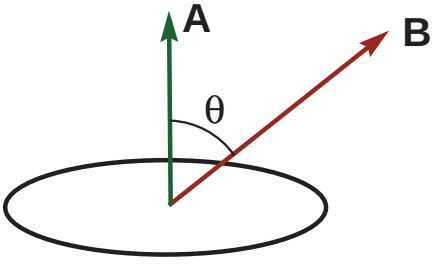
Şimdi mıknatısı tele yaklaştırdınız. Voltmetre birden voltaj olduğunu göstermeye başladı, tellerdeki elektrik alan sıfır değil artık. Mıknatıs tel halkaya *daha hızlı* yaklaştıkça elektrik alan artar. Mıknatıs halkaya çok yakın da olsa ama duruyorsa, elektrik alan sıfır olur. *İndüklenmiş* elektrik alan sadece, eğer mıknatıs

hareket ediyorsa ve halkanın içindeki bölgeden geçen manyetik alanlar değişiyorsa oluşur.* Eğer mıknatısı geri geri hareket ettirirseniz elektrik alanlar (voltmetre ölçümleri) ters yöndedir. Değişen manyetik alanlarla pek çok farklı durumda böyle deneyler yapan Faraday, manyetik alanın bir halkanın içinde kalan yüzeyden geçen akısı değiştiği zaman bu halka/tel boyunca net bir dolanma gösteren bir elektrik alanı oluştuğunu keşfetti. Elektrik alanının büyüklüğü halkadan geçen manyetik akının değişme hızıyla orantılıdır. Hiç değişmeyen bir manyetik alan, istediğiniz kadar güçlü olsun, yine de elektrik alan yaratmaz. Faraday Kanunu bütün bu deneyleri özetleyerek şöyle formülleştirir:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} \qquad [\textbf{Faraday Kanunu}] \qquad (25.1)$$

$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$ ile $-\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}$ arasındaki orantı sabitinin SI birimlerindeki değeri 1'dir. Faraday Kanunu der ki:

> Elektrik alanının herhangi bir kapalı eğri boyunca dolanması, *eksi* bir sabit kere o eğrinin kuşattığı yüzeyden geçen manyetik akının değişme hızına eşittir.



$$\Phi_B = A\,B\cos\theta$$

Denklem 25.1'in sağ tarafındaki eksi işaretinin anlamı nedir?

Benzer bir ifadeyi, 24. Bölümde işlediğimiz Ampère-Maxwell Kanunu'nda (Denklem 24.1), sürülme akımı teriminde görmüştük. Orada **dl** ve **dS**'nin yönlerini tanımlamıştık. Matematik geleneği, kapalı bir halka üzerinde **dl**'nin yönelimini sağ el kuralıyla belirler. Sağ elinizin başparmağını **dS**'ye paralel tutarsanız, halka

* Canlandırmada mıknatıs tel halkanın içinden geçerken oluşan voltajı görüyorsunuz. Aynı mıknatısı daha hızlı hareket ettirirseniz oluşan elektrik alanı ve voltaj daha yüksek oluyor.

üzerindeki çizgi öğeleri **dl** parmaklarınızın baktığı yöne, **dS** alan öğelerine göre saat yönünün tersine doğru bakar. Denklem 25.1'deki eksi işareti, **dS** yönünde yüzeyden geçen manyetik akı (**B** · **dS**) artıyorsa dolanma halindeki indüklenmiş elektrik alanın kapalı eğri boyunca *saat yönüne* yöneldiğini gösterir. İndüklenmiş **E**, **dl**'nin kapalı eğri üzerindeki yöneliminin ters yönündedir. Bu da, eğer etrafta ivmelenebilecek ve elektrik alanı tarafından harekete geçirilebilecek yük varsa, **dS**'nin çevresinde yine saat yönünde hareket eden bir akım indükler. Eğer vakumlu ortamda değilsek etrafta yükler vardır, hele de kapalı eğrimiz gercek bir telden oluşuyorsa ya da bir plazmadan geçiyorsa. Şekil 25.2'de, manyetik akı ($\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \Phi_B$) yüzey öğesi **A**'nın yönündedir (**dS** yönündedir):

$$\Phi_B = AB \cos \theta.$$

Bir kapalı eğrinin çevrelediği yüzeyden geçen manyetik akının değişimi, manyetik alanın büyüklüğünün değişmesinden, eğrinin çevrelediği alanın değişmesinden veya cos θ'nın değişmesinden kaynaklanabilir.

Soru

Ampère Kanunu'na göre bu indüksiyon akımının kurduğu *ikincil* manyetik alanın yönü nedir?

Cevap

Manyetik akının bir yönde artışı söz konusu olduğunda, ikincil manyetik alanlar, eğrinin kuşattığı yüzeyden geçen akıları ilk baştaki akı artışına ters yönde olacak şekilde ortaya çıkarlar. O halde, manyetik akıda değişiklik olması elektrik alanlar indüklüyor, elektrik alanlar akım üretiyor, akımlar akıdaki ilk değişimin yönünün ters yönünde ikincil manyetik alanlar üretiyor, bu manyetik alanlar da ilk değişime karşı hareket ediyor! Deneylerle gözlenen ve Faraday Kanunundaki eksi ile ifade edilen şey bu işte. Eksi işaretine, yani indüklenmiş elektrik alanlarının manyetik akıdaki değişimleri tersine çevirme eğilimine ***Lenz Yasası*** deniyor. Lenz Yasası aslında ayrı bir yasa değil de, Faraday Kanununun eksi işaretli özelliği.

Eğer *değişen bir manyetik akı* varsa, manyetik akının değiştiği bölgeyi içine alan kapalı eğrilerde *dolanan bir elektrik alanı* oluyor. Böyle bir kapalı eğriyi izleyerek aynı noktaya geri dönünce voltajda net bir değişme oluyor (buna da *indüksiyon* voltajı veya "indüksiyon elektromotor kuvveti" deniyor). Yük üzerinde iş yapan hiçbir şey olmadığı halde, ortada bir pil olmadığı halde, halka üzerinde hareket

eden yükün potansiyel enerjisi değişiyor!

Faraday'in İndüksiyon Yasası, Ampère Kanununun ikinci terimi olan sürülme akımı terimiyle benzer. Elektrik ve manyetik alanların rolleri yer değiştiriyor, bir de Faraday Kanununda, Ampère Kanununun ikinci teriminde karşımıza çıkmayan bir eksi işareti var. Bu eksi işareti elektrik ve manyetik alanlar arasındaki ilişkinin bir geri getirme özelliği olduğunu gösteriyor. Geri getirme etkisi, elektrik ve manyetik alanların ikili dinamiğinde bir gidip gelme (osilasyon) özelliği olduğunu ortaya koyuyor. Ampère ve Faraday Kanunları, elektrik alanı ve manyetik alanın vakumda bile (ve madde içinde de) dalgalar olarak yayılmasını gerektiriyor.

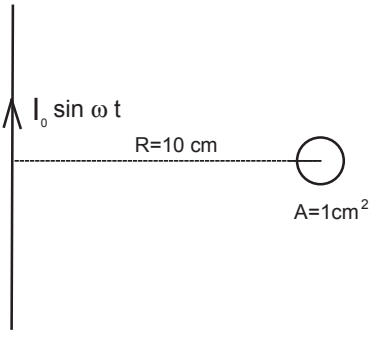
PROBLEMLER

1. *Sarmal bobin üzerinde indüksiyon voltajı*: Problem 22.6'da gördüğümüz sarmal bobini ele alalım. Ampère Kanununu kullanarak, birim uzunluk başına n defa sarılmış, I akımını taşıyan sonsuz bir sarmal bobinin içindeki manyetik alanın $B = \mu_0 nI$ olduğunu bulmuştuk. l uzunluğunda ve N defa sarılmış, $n = N/l$ olan gerçek ve sonlu bir sarmal bobinin uçlarından uzak kısımları söz konusu olduğunda, sonsuz sarmal bobin yaklaşımı uygun bir hassasiyet sağlıyor. Sarmal bobinin kesitinin alanı A, böylece bobinin içindeki manyetik akı $\Phi_B = \mu_0 NIA/l$ oluyor.
   (a) Eğer akım zamanla değişiyorsa ve değişim hızı da dI/dt ise, telin bir dönüşü etrafındaki indüksiyon voltajı ne kadar olur?
   (b) Sarmal bobini meydana getiren N tane dönüş etrafındaki indüksiyon voltajı ne kadar?
   (c) Faraday Kanununa göre bir halka çevresindeki indüksiyon voltajı, akının değişim hızı $d\Phi_B/dt$'ye ve Ampère Kanunu gereği, akımın değişim hızı dI/dt'ye doğrusal olarak bağlı. Böylece zamana bağlı akım taşıyan bütün sistemlerde toplam indüksiyon voltajı $V = -L\, dI/dt$ şeklinde; buradaki orantı sabiti, "*indüktans*" adı verilen L, o sisteme ait bir özellik. Peki, sarmal bobinin indüktansı ne?
   (d) İndüktansın boyutları ve SI birimleri C, m, kg ve s cinsinden nedir? Bu birimin adı "*Henry*", ABD'li fizikçi Joseph Henry'den geliyor.

2. $n = 1000$ sarım/m'lik, kesit alanı 1 cm^2 olan bir sarmal bobin, $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ dalgalı (alternatif) akımını taşıyor; akım genliği $I_0 = 2$ A, frekans ise $f = 50$ Hz. İndüktans L ve indüksiyon voltajı $V(t)$ ne kadar?

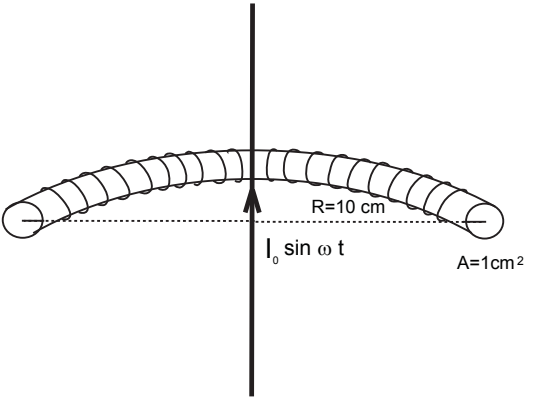
3. Sonsuz uzunlukta bir düz tel, alternatif akım (AC) $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ taşıyor; akım genliği $I_0 = 5$ A, frekans da $f = 50$ Hz (Şekil ??). Düz telden 0,1 m uzak-

lığında, 1 cm^2 alanı kapsayan dairesel bir tel halka var. Dairesel halka, sonsuz düz telin de bulunduğu bir düzlem üzerinde. Halkadan geçen manyetik alanın değeri, halkanın telden 0,1 m uzaklıkta bulunan merkezindeki değeri olsun. Dairesel halka üzerindeki indüksiyon voltajı ne kadar?



4. Şekildeki sonsuz düz tel, 2 A'lık *sabit* akım taşıyor. Dairesel halka bu sefer sonsuz düz tele paralel bir eksen üzerinde düzenli olarak döndürülüyor; periyot $P = 0{,}02$ s, frekans $f = 50$ Hz. Halkadan geçen manyetik alanın değerinin, halkanın telden 1 m uzaklıkta bulunan merkezindeki değer olduğunu farz edin. Dairesel halka üzerindeki indüksiyon voltajı ne kadar?

5. ***Toroid***: Sonsuz bir düz telden 10 cm uzaklıkta, kesitinin alanı 1 cm^2 olan bir *torusun (simidin)* yüzeyine başka bir tel 10.000 defa sarılıyor (Şekil 23.4). Böyle, simide sarılmış bir bobine *toroid* deniyor. Bu toroid üzerindeki indüksiyon voltajı ne kadar?



26

Dalgalar ve Maxwell Denklemleri

Elektrik ve manyetizma üzerine *Maxwell Denklemlerinin* dördünü de gördük:

Maxwell Denklemleri

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \qquad \text{[Gauss Kanunu]}$$

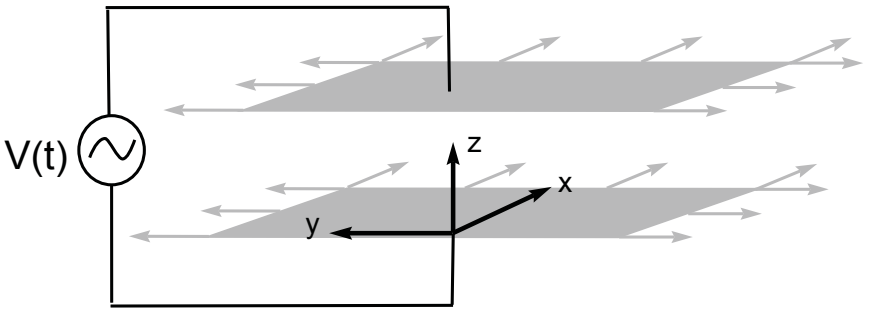
$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} \qquad \text{[Faraday Kanunu]}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{dS} \qquad \text{[Ampère-Maxwell Kanunu]}$$

Bu bölümde, Şekil 26.1'de görülen "yarısonsuz" paralel levhaların arasındaki elektrik ve manyetik alanları inceleyeceğiz ve Ampère-Maxwell Kanunu ile Faraday Kanununun bu alanlara dair neler gösterdiğini işleyeceğiz. Yarısonsuz paralel levhalar derken, $x = 0$'da başlayan, $+x$, y ve $-y$ yönlerinde sonsuza uzanan, z eksenine dik paralel levhaları kastediyoruz. Sonra da dalga denklemlerinin buradan nasıl çıkarıldığını göreceğiz. Bu bölüm matematik bakımından biraz daha ileri bir bölüm. Eğer matematik işlemleri takip edemezseniz merak etmeyin. Bu bölümdeki şekillere bakarak ne olup bittiğini anlayabilirsiniz.

Önce yarısonsuz paralel levha sisteminin simetrisini kullanalım. $x = 0$'daki uçtan levhanın biraz içine doğru, levhaların ucundan alınan x uzaklığının levhaların arasındaki uzaklıktan daha büyük olduğu yerde, elektrik alan z yönünde, yük taşıyan levhalara dik olacak. $x = 0$'da yüklenen değişken voltaj farkından dolayı levhalardaki yükler zamanla değişiyor. z yönündeki elektrik alan zamana bağlı;



Şekil 26.1

$\partial E/\partial t$ de z yönünde. Levhaların üzerindeki yükler zamanla değişirken, zamana bağlı akımlar $x = 0$'daki enerji kaynağından x yönünde levhalara dağılacak. z yönündeki $\partial E/\partial t$ ve x yönünde akan akımlar manyetik alan kaynağı olacaklar. Paralel levhaların simetrisi gereği, manyetik alanlar y yönünde olmalı, zira $\partial E/\partial t$'ye dik olan xy düzlemleri de, $i(t)$'ye dik yz düzlemleri de y yönünü içeriyor. Başka bir ifadeyle, B, z yönündeki $\partial E/\partial t$'nin etrafında ve x yönündeki $i(t)$'nin etrafında dolanıyor olmalı. Düzlem paralel levhalarının simetrisinde bu durumda B alanına y yönü kalıyor. Sabit bir y çizgisi üzerindeki bütün noktalar fiziksel olarak birbirine denk. Simetri, kıvrımlı manyetik alan çizgilerine ya da z veya x yönlerine işaret eden manyetik alanlara imkân bırakmıyor.

26.1 AMPÉRE-MAXWELL KANUNUNUN UYGULAMASI

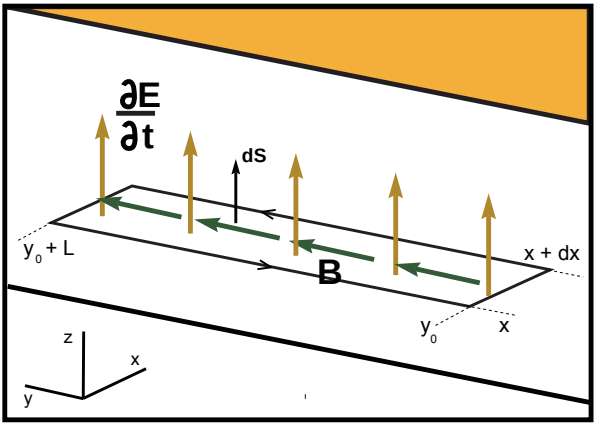
Maxwell'in sürülme akımı terimi de dahil olmak üzere Ampère-Maxwell Kanununu düşünelim (Denklem 24.1):

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{dS} \tag{26.1}$$

Levhaların arasındaki boşlukta yük de akım da olmadığı için, Ampère-Maxwell Kanununun ilk teriminin bir katkısı yok;

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 \epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{dS} \tag{26.2}$$

Burada sol taraftaki integral bir kapalı eğri boyunca hesaplanacak, sağdaki integral ise bu eğrinin çevrelediği yüzey üzerinden alınacak. Sürülme akımı teriminde $\partial \mathbf{E}/\partial t$'yi, $\mathbf{E}$'nin t'ye göre kısmi türevini kullanıyoruz.



Şekil 26.2

Ampère-Maxwell Kanununu özel bir sadelikle ifade edebilmek için yarısonsuz paralel levhaların simetrisinden faydalanıyoruz. Şekil 26.2'deki dikdörtgen, *xy* düzleminde *x* ile *x* + *dx* arasında *y* = y_0'dan *y* = y_0 + *L*'ye kadar uzanıyor. Yüzey öğesi **dS**'nin yönünü +*z* yönü olarak seçelim. O halde dikdörtgenin çevresini takip eden **dl** adımlarının yönelimi sağ el kuralına göre, Şekil 26.2'de oklarla gösterildiği gibi saat yönünün tersi yönde olacak. Dikdörtgenin kısa kenarlarında, **B** = **j** B_y, **dl** = **i** *dx*'ye ve **dl** = −**i** *dx*'e dik olacak, kısa kenarlarda **B** · **dl** = 0. Katkı sadece dikdörtgenin uzun kenarlarından geliyor. Dikdörtgenin uzun kenarında *x* + *dx*'te, **B** = $B_y(x + dx)$ **j**, dikdörtgeni izleyen **dl**'nin yönünde, uzun kenarda *x*'te ise **B** = $B_y(x)$ **j** dikdörtgeni izleyen **dl** adımlarının ters yönünde.

Böylece, Ampère-Maxwell Kanununun (26.2) sol tarafı şöyle oluyor:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = B_y(x + dx, t)L - B_y(x, t)L = L\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) dx \tag{26.3}$$

Son adımda kısmi türevin tanımını kullandık:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{B_y(x + dx, t) - B_y(x, t)}{dx}$$

Ampère-Maxwell Kanununun (26.2) sağ tarafında, **dS**, +*z* yönünde olacak şekilde seçildiği için, sürülme akımı terimi şöyle:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{dS} = \frac{\partial E_z}{\partial t}\, dS$$

Dikdörtgenin alanı *S* = *Ldx* çok çok küçük, bu yüzden $\partial E_z/\partial t$'ye dikdörtgen yüze-

yinin her yerinde sabit muamelesi yapılıp integralin dışına çekilebilir:

$$\mu_0\epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \cdot \mathbf{dS} = \mu_0\epsilon_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right) \int dS = \mu_0\epsilon_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right) L dx \tag{26.4}$$

Denklemin sol ve sağ tarafları için bulduğumuz sonuçları ((26.3) ve (26.4)'ü) Ampère-Maxwell Kanununda (26.2) yerlerine koyunca şunu elde ediyoruz:

$$L\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) dx = \mu_0\epsilon_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right) L dx \tag{26.5}$$

L ve *dx*'i iki taraftan da kaldırınca, bu problem için Ampère-Maxwell Kanununun yeni bir ifadesini bulmuş oluyorsunuz; bir "diferansiyel denklem" ifadesi bu:

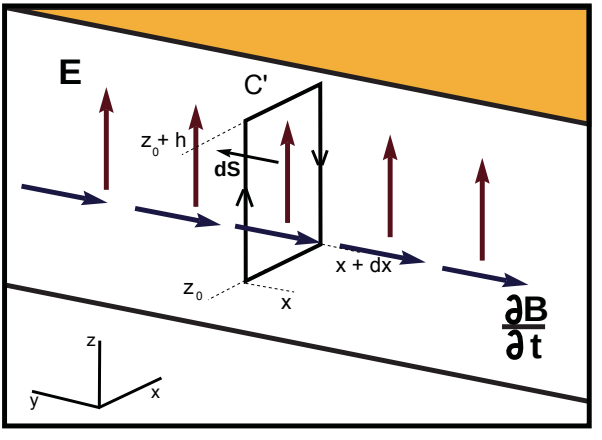
$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{26.6}$$

26.2 FARADAY KANUNUNUN UYGULAMASI

Şimdi Faraday Kanununun integral halini ele alalım:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} \tag{26.7}$$

Soldaki integralin bir kapalı çizgi üzerinden hesaplanması, sağdaki integralin de aynı çizginin çevrelediği yüzey üzerinde alınması gerekiyor. Şekil 26.3'deki hayalî dikdörtgen C' üzerinden düşünelim.



Şekil 26.3

Dikdörtgen *xz* düzleminde, paralel levhalarımızın arasında $z = z_0$'dan $z = z_0 + h$'ye, x'ten $x + dx$'e uzanıyor. Bu dikdörtgenin alanı $dS = h\,dx$. Dikdortgenin kısa kenarlarında $\mathbf{E} = \mathbf{k}\,Ez$, $\mathbf{dl} = \mathbf{i}\,dx$ ve $\mathbf{dl} = -\mathbf{i}\,dx$'e dik. Kısa kenarlarda $\mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$ sıfır. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$'nin dikdörtgenin çevresini oluşturan kapalı çizgi integraline (Faraday Kanununun sol tarafına) tek katkı, dikdörtgenin uzun kenarlarından geliyor, bunların da uzunluğu h. Denklem (26.7)'nin sağ tarafındaki $\mathbf{dS}$'nin $+y$ yönünde olduğunu kabul edelim. Dikdörtgen C' nin sol taraftaki uzun kenarı da şekilde gösterildiği yönde takip edilmeli, $\mathbf{dS}$'ye göre sağ el kuralına uymalı.

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = E_z(x,t)h - E_z(x+dx,t)h = -h\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)dx \tag{26.8}$$

Faraday Denkleminin sağ tarafında, seçtiğimiz $\mathbf{dS}$'nin $+y$ yönünde olduğu dikdörtgen yüzeyinden geçen manyetik akının zamana göre türevi var. Dikdörtgenin alanı $S = h\,dx$ çok çok küçük olduğu için, B_y bunun üzerinde sabit kabul edilebilir ve integralin dışına çıkarılabilir. O zaman elimizde,

$$-\frac{d}{dt}\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = -\frac{d}{dt}B_y \int dS = -\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}\right)S = -\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}\right)hdx \tag{26.9}$$

var. Denklemin sol ve sağ tarafları (Denklem 26.8 ve 26.9) için bulduklarımızı Faraday Kanununda (26.7) yerlerine koyunca şunu elde ediyoruz:

$$-h\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)dx = -\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}\right)hdx \tag{26.10}$$

İki taraftaki h ve dx'leri kaldırınca, diferansiyel denklem olarak ifade edilmiş biçimiyle Faraday Kanununu bulmuş oluyoruz:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{26.11}$$

26.3 DALGA DENKLEMİNİ BULMAK

Ampère-Maxwell ve Faraday Kanunlarının diferansiyel biçimlerini bir araya getirelim:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{26.12}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{26.13}$$

Şimdi de Ampère-Maxwell Kanununun (26.12) iki tarafının da zamana göre kısmi türevini ve Faraday Kanununun (26.13) kısmi x türevini alalım, böylece denklemler şu hale geliyor:

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \tag{26.14}$$

ve

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \tag{26.15}$$

Son iki denklemin sol tarafları birbirinin aynı. Demek ki bunların sağ tarafları da birbirine eşit. Başka bir deyişle:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \tag{26.16}$$

İşte bu, elektrik alanın *dalga denklemi*. Bu denklemin çözümü:

$$E_z = E_0 \cos(kx - \omega t + \phi) \tag{26.17}$$

Bu çözümde karşımıza çıkan sabitler, dalgalara ait önemli özellikleri yansıtıyor. ***Faz*** denen ϕ sabiti, zamanın başlangıç ($t = 0$) ânındaki ilk şartlara ve sistemin sınır koşullarına bağlı. Elimizdeki örnekte bunları $\phi = 0$ olacak şekilde seçebiliriz, eğer $x = 0$'da levhalara uygulanan elektrik alan

$$E_z(x = 0, t) = E_0 \cos(\omega t) \tag{26.18}$$

ise, o zaman çözüm

$$E_z = E_0 \cos(kx - \omega t) \tag{26.19}$$

olur. Elektrik alanın x'e bağlılığını incelemek için, herhangi bir t anında çözümün anlık bir fotoğrafını çekin. O andaki x bağlılığı, yani fotoğrafını çıkardığınız elektrik alanın yerden yere değişimi, kosinüs dalgası şeklindedir. Elektrik alan her x'te ve $x + \lambda$ noktasında aynı değerleri tekrar eder, $k\lambda = 2\pi$ olur. λ'ya ***dalga boyu*** denir, k de ***dalga sayısıdır*** ($k \equiv 2\pi/\lambda$).

Şimdi de sabit bir x noktası için o noktadaki elektrik alanın elektromanyetik dalga oradan geçip giderken zamanla nasıl değiştiğini düşünün. Zaman geçtikçe elektrik alanın değeri, kosinüs fonksiyonu olarak artıp azalır. Elektrik alanın t zamanındaki değeri daha ileriki bir $t + T$ zamanında tekrar edecektir, ***periyot*** adı verilen bu tekrarlama süresi $\omega T = 2\pi$ bağıntısını sağlamalı ki bu sürenin sonunda

elektrik alanı kosinüs fonksiyonu ile birlikte t zamanındaki değerini tekrarlasın. ω ise ***açısal frekanstır*** ($\omega \equiv 2\pi/T$). Demek ki herhangi bir x noktasında elektrik alanı, zamana göre basit bir harmonik osilasyon yapar.

26.4 ELEKTROMANYETİK DALGALAR IŞIK HIZIYLA YAYILIR:

Şimdi bu dalganın ***yayılımına*** bakalım. Elektrik alanın çözümünü

$$E_z = E_0 \cos[k(x - vt)], \qquad v = \frac{\omega}{k}, \tag{26.20}$$

diye yazarsak, görürüz ki dalganın t zamanında $x = x_0 + vt$ noktasındaki değeri, $t = 0$ zamanında x_0'da almış olduğu değerle aynı. *Dalga pozitif x yönünde $v = \omega/k$ hızıyla yol alıyor*. Dikkat ederseniz,

$$v = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = \frac{\lambda}{T} \tag{26.21}$$

Eğer dalga çözümünü (26.17) dalga denklemindeki (26.16) yerine koyarsak, denklemin iki tarafı şöyle hesap edilir:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(kx - \omega t + \phi) \tag{26.22}$$

$$\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\mu_0\epsilon_0\omega^2 E_0 \cos(kx - \omega t + \phi) \tag{26.23}$$

Denklem 26.16'yı sağlamak için,

$$\mu_0\epsilon_0\omega^2 = k^2$$

olmalı. Denklem 26.21'e göre bu durumda

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} \tag{26.24}$$

olur. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m A^{-1} = $4\pi \times 10^{-7}$ kg m C^{-2} ve E_0 = 8 854 × 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2} olmasını kullanarak, v'nin sayısal değerinin ışık hızı c'ye eşit olduğunu buluyoruz: $v = 3{,}00 \times 10^8$ m/s = c.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \qquad \text{[Işık Hızı]} \tag{26.25}$$

Benzer şekilde manyetik alan B_y de dalga denklemini sağlıyor. Bunu görmek için, Ampère-Maxwell Kanununun (26.12) iki tarafını da $\mu_0\epsilon_0$'a bolüp kısmi x türevini alın. Faraday Kanununun (26.13) da zamana göre kısmi türevini alın. Bu iki denklemi karşılaştırınca görüyoruz ki:

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \tag{26.26}$$

Bu denklemin çözümü şöyle:

$$B_y = B_0 \cos(kx - \omega t + \phi) \tag{26.27}$$

Burada k ve ω, elektrik alanının dalga denklemindekiyle aynı fiziksel anlamlara geliyorlar.

> Hem elektrik alanı hem manyetik alan boşlukta dalga gibi yayılırlar. Elektrik alanının, manyetik alanın ve dalgaların yayılışının yönlerinin hepsi birbirine diktir.

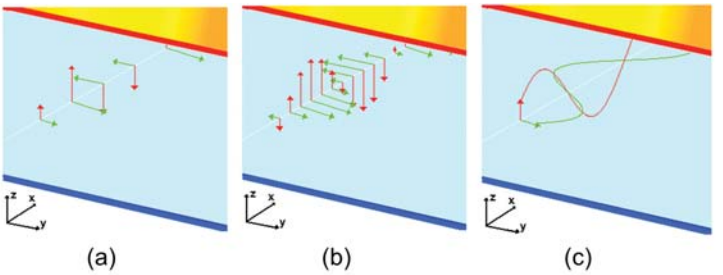
Elektrik ve manyetik alanlar birbirleriyle Amp`ere-Maxwell Kanunu ve Faraday Kanunu, buradaki Denklem 26.1 ve 26.7 üzerinden ilişkili. $E0$, $B0$ ve φ sabitlerinin değerleri, sınırlama koşulları ile sabit. İster Denklem 26.12, ister Denklem 26.13'ü alıp, çözümlerle (Ez ve By) birlikte kullanınca görüyoruz ki

$$B_0 = -E_0/c. \tag{26.28}$$

Sınır koşulu $E_z(x = 0,\ t) = E_0 \cos(\omega t)$. Elektrik alan, paralel levhaların ucundan dalgalanan (alternatif) dış voltaj kaynağı tarafından besleniyor. Bu sınır koşulu, Denklem 26.12 ve 26.13 üzerinden hem elektrik hem manyetik alanın dalga çözümlerinde $\phi = 0$'ı sabitliyor.

Yukarıdaki denklemlerde, Şekil 26.2 ve 26.3'deki gibi, zamanla değişen elektrik/manyetik alanların uzayda değişen manyetik alanlar/elektrik alanları ürettiklerini ve bunun sonucunda elektromanyetik dalgaların oluştuğunu gördük. Şekil 26.4'te bu süreçte belli bir zamanda farklı noktalarda oluşan elektrik ve manyetik alanları görüyoruz. Alanların ölçüldüğü noktalar sıklaştıkça, Maxwell Denklemlerinden elde edilen elektromanyetik alanların aslında bir dalga olduğu anlaşılıyor (Şekil 26.4 c). Dalganın hareketini http://dogayiogrenmek.blogspot.com.tr/ adresindeki "Elektromanyetik Dalgalar" adlı simülasyonda izleyebilirsiniz.

Böylece ışığın bir elektromanyetik dalga olduğunu bulduk. Tek elektromanyetik dalga ışık değil. Maxwell Denklemleri ve dalga denklemi sadece belli bir



Şekil 26.4

dalga boyu ya da frekans için geçerli değil. $\omega/k = c$ (veya $\lambda f = c$) olduktan sonra her frekansta ve dalga boyunda elektromanyetik dalga boşlukta yayılım yapacak, çünkü Maxwell Denklemlerinde özel bir uzunluk veya zaman ölçüsü yok. Vakumda her nevi elektromanyetik dalga var ve hepsi de ışık hızıyla hareket ediyor. Dalga boylarının ve frekansların tam yelpazesi, elektromanyetik ışımanın "***spektrumu***" çok geniş, kilometreler kadar uzun dalga boyundaki radyo dalgalarından, 10^{23} Hz ve daha yüksek frekanslara ve buna denk gelen 10^{-15} m veya daha kısa dalga boylarındaki *gamma ışınlarına* kadar uzanıyor.

Maxwell, Maxwell Denklemlerinden ışık hızında elektromanyetik dalga yayılımı olduğu sonucunun çıktığını gösterdiğinde, bilinen tek elektromanyetik ışıma (radyasyon) türü, bildiğimiz ışıktı. Maxwell Denklemlerini izleyerek radyo dalgalarını oluşturmak ve bunları algılayabilmek için ilk deneyleri Hertz yaptı, ondan sonra gelen Marconi gibi başka mucitler de bunlar üstünden elektromanyetik iletişim teknolojisini geliştirdiler. 19. yüzyılın sonuyla 20. yüzyılın başında atom fiziğinin ve nükleer fiziğin gelişmesiyle X ışınları ve gamma ışınları keşfedildi ve bunların çok yüksek frekanslı elektromanyetik ışımalar olduğu anlaşıldı.

Elektromanyetik dalgaların frekansları, onları üreten yük ve akım sistemlerinin (en genel anlamıyla zamana bağlı *devrelerin* ve *antenlerin*) osilasyon frekanslarıyla belirleniyor; ışık kaynakları, atomlar, gamma ışını yayan radyoaktif çekirdekler vesaire de bu yük ve akım sistemlerinden. Bunun gibi, dalga boyları da kaynak sistemlerin boyutlarına göre belirleniyor. Tabii elektromanyetik dalgalar yalnız boşlukta değil madde içinde de yayılabilirler. Elektromanyetik dalgaların yayılımını belirleyen şey ise, elektromanyetik alanlar ile bunların karşılarına çıkan maddeler arasındaki etkileşim. Maddi ortamın osilasyon frekansına denk gelen *rezonant* (çınlayan) frekanslar ya *emiliyor* ya da *dağılıyor*, yani dalgadaki alanlar ortamdaki yüklere etkin bir şekilde ivme kazandırarak kendi enerjilerini kaybediyorlar. Bu sefer yükler başka yönlere doğru, ve belki başka frekanslarda yeni elektromanyetik dalgalar yayabiliyor. Sonuç olarak belli özelliklerde frekanslara sahip elektromanyetik dalgalar ortamdan geçmiyor. Ortam, bazı frekanslarda-

ki elektromanyetik dalgalar için *saydam*, başka frekanstakiler için *saydam değil (opak)*. Elektromanyetik dalgaların algılanması ve kullanımı, ilgili frekanslarla birlikte rezonans yapmak üzere tasarlanmış *alıcılar* gerektiriyor; bazen, seçilen frekansı algılamak için sistem parametrelerini değiştiren bir *kanal seçici* de oluyor.

Yıldızlar ve galaksiler, radyo dalgalarından gamma ışınlarına kadar çok çeşitli bantlardan elektromanyetik ışıma yayıyorlar. En uzun dalga boyundan radyo dalgaları, onları yayan kaynaktan uzaklaşamıyorlar çünkü yüklü parçacıkların bulunduğu çok düşük yoğunluklu ortamlar (*plazma*) bile bunları emiyor. Öte yandan en yüksek frekanslardaki gama ışınları da kaynaklandıkları bölgenin dışına yayılamıyorlar çünkü gama ışını *fotonlarının* o kadar yüksek enerjileri var ki hemen bozunuyorlar, yerlerine yüksek enerjili başka parçacıklar yaratıyorlar. En uzun dalga boyundaki radyo dalgalarından en yüksek frekanslı gama ışınlarına kadar geniş spektrumdaki elektromanyetik dalgalar, yıldızlarda, galaksilerde, gaz bulutlarında, yıldızlararası ortamda ve bunun gibi çok çeşitli süreçlerde oluşuyorlar. Yıldızların çoğu gibi bizim Güneşimiz de enerjisini ağırlıklı olarak *optik bant*'ta yayıyor, yani *ışık* olarak. Dünya'nın atmosferi, elektromanyetik ışımanın çoğu bandı için saydam değil. *Pencereler*, yani atmosferin geçirgen olduğu frekans bantları, optik bant ile radyo bantlarının ve mikrodalga bantlarının bazı bölümlerinden ibaret.

3,5 milyar yıllık evrim süreciyle, doğal olarak Dünya'nın atmosferinin izin verdiği elektromanyetik ışımaya, ışığa, duyarlı olan canlı türleri oluştu; bu türler atmosferin geçirmediği X ışınlarına ve morötesi ışınlara ise dayanıksız. Bizim gözlerimiz, mor olarak algıladığımız ~3500 Angström (350 nanometre)* dalga boyu ile, kırmızı olarak algıladığımız 6500 Angström (650 nanometre) dalga boyu arasındaki elektromanyetik ışımaya duyarlı.

Elektromanyetik dalgalar maddi bir ortamda yayılırken hızları c'den farklı olabilir ve dalga boyu λ ile frekans f arasındaki ilişki daha karmaşık olabilir. Pek çok maddede elektromanyetik dalganın hızının kendisi dalga boyuna bağlı. Elektromanyetik dalgalar bir ortamdan ötekine geçerken yön değiştiriyor. Yön değişikliği, ortamlardaki hıza bağlı. Bir ortamdaki dalga hızı, dalga boyuna (renk) bağlı olduğu için, farklı renkler farklı yönlerde kırılıyor. "Beyaz" ışık cam prizmadan geçince farklı renklerden bir spektrum (tayf) oluşmasının nedeni bu.

26.5 ELEKTROMANYETİK DALGALARDAN IŞIYAN ENERJİ

Sabit hızla hareket eden bir yük sabit akımlar oluşturuyor ve sabit manyetik alanlar kuruyor. Zamana bağlı, birbiriyle etkileşen manyetik alanlar, elektrik alanları ve elektromanyetik dalgalar sabit hızla hareket eden yükler tarafından OLUŞTU-

---

* 11 Angstrm(A) = 10^{-10} m; 1 nanometre = 10^{-9} m.

RULMAZ. Oysa ivmelenen yükler, birbiriyle etkileşen, değişken manyetik alanlar ve elektrik alanları yaratıyor. Elektrik alanları ve manyetik alanlar, dalgalar halinde uzak bölgelere kadar yayılıyor, ulaştıkları uzak yerlerde bulunan başka yükleri Lorentz kuvveti ile etkileyebiliyor. Elektromanyetik alanlar bu yüklere fazladan kinetik enerji vererek onları ivmelendirebiliyor. Elektromanyetik dalgalar böylece uzayda enerji taşıyor. İvmelenmiş bir yük, bu elektromanyetik alanları yarattığına göre, uzay üzerinden enerji gönderiyor olmalı. İvmelenen bir yükün ürettiği "güç," yani saniyede ışınan enerji miktarı şöyle:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{c^3}a^2 \tag{26.29}$$

Burada q yük, a bu yükün ivmesi, c de ışık hızıdır. (Dikkat: Bu son formülde E ile elektrik alanı değil yükün ürettiği enerjiyi kastediyoruz.)

PROBLEMLER

1. Eğer bu bölümde ele aldığımız iki paralel levha $x = 0$ düzleminden negatif x'e doğru uzansaydı, dalgalar $-x$ yönünde yol alıyor olacaktı. Bu durumda yol alan dalga çözümleri $E_z(x, t)$ ve $B_y(x, t)$'nin biçimleri nasıl olurdu?

2. Bir paralel levha düzenlemesinde iki levha arasındaki uzaklık 20 cm. Levhalara, $x = 0$'da, $V_0 = 3$ V genliğinde bir dalgalı (alternatif) voltaj farkı $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ uygulanıyor.
   (a) Elektrik alanı osilasyonlarının genliği E_0 ne kadar? Uç etkileri göz ardı edilebilir düzeyde, dolayısıyla $x = 0$'daki elektrik alanı z yönünde.
   (b) Manyetik alan osilasyonlarının genliği B_0 ne kadar?

3. Bir dalgalı akım $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$, sonsuz bir düz telden geçiyor. Dalgalı akım frekansı $f = 50$ Hz.
   (a) Bu akımın uzayda meydana getirdiği, zamana bağlı manyetik alanları ve elektrik alanlarını çizin.
   (b) Elektromanyetik dalgaların yayılım yönünü çizin.
   (c) Bu elektromanyetik dalgaların açısal frekansı ω ne kadar?
   (d) Dalgaların vakumda yayıldığı farz edilirse, dalga sayısı k ve dalga boyu λ ne kadar?

4. Aşağıdaki kaynaklardan yayılan elektromanyetik dalgalarının frekansları ve dalga boyları ne kadar?

(a) En sevdiğiniz FM radyo istasyonu.

(b) Tipik bir kısa dalga radyo istasyonu.

(c) Televizyon istasyonu.

5. **Plazma Frekansı:** m^3'te n tane serbest elektronu (ve $+e$ yüklü n tane iyonu) olan bir plazmanın, pozitif ve negatif yüklerin birbirine karşı gidip geldiği tipik bir osilasyon frekansı oluyor, buna da *plazma frekansı* ω_p deniyor:

$$\omega_p = (\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e})^{1/2}$$

burada e yük, m_e ise elektronun kütlesi. Plazma frekansı ω_p'den daha yüksek frekansa sahip elektromanyetik dalgalar plazmadan geçebiliyor, daha düşük frekanstakilerse iyonosferden yansıtılıyor. Radyo yayınları, yansıma yoluyla Dünya'nın uzak köşelerine erişebilmek için iyonosferi ayna gibi kullanıyor.

Uzay mekikleri ile iletişim kurabilmek icin iyonosferin plazma frekansından daha yüksek frekanslı sinyaller kullanmak gerek. Uzay mekikleri Dünya'ya geri dönüş yolunda iyonosferden geçerken, mekiğin çevresindeki yoğun ısı oluşumu plazma yoğunluğunun ve dolayısıyla plazma frekansının da artmasına neden oluyor. Bu durum iletişimin geçici olarak kesilmesine neden oluyor. Mekik nötr atmosfere girince iletişim tekrar kuruluyor.

(a) *Yıldızlararası maddenin* ortalama elektron yoğunluğu, cm^3'e 1 elektron. Yıldızlararası maddenin plazma frekansı ne kadar?

(b) Yıldızlararası maddede yayılabilecek en düşük elektromanyetik dalga frekansı ne kadar?

(c) Atmosferin plazma kısmı, Dünya'nın iyonosferidir. İyonlaşmanın asıl sebebi Güneş'in morötesi ışıması olduğu için, iyonosferin yük yoğunluğu yüksekliğe göre önemli değişiklikler gösteriyor ve gün içinde de epeyce değişiyor. Gündüz iyonosferik yük yoğunlukları cm^3'te $n = 10^6$ elektrona kadar çıkabiliyor. İyonosfer bu yoğunluktayken onun içinden geçebilecek en düşük frekans ne kadar?

27
Devreler

Bu bölümde, kaynak yük ve akım dağılımları tarafından oluşturulan elektromanyetik alanlarda birim yük başına potansiyel enerjiyi, yani voltajı, voltaj ile yük ve akım dağılımları arasındaki ilişkileri ele alacağız. Aslında her türlü yük ve akım dağılımı *devredir*, fakat devre deyince insanın aklına tipik olarak birtakım metal tellerden oluşan, elektronların teldeki başka elektron ve akımlardan gelen dirence (sürtünmeye) karşı aktığı bir cihaz geliyor. Böyle bir elektronik devre, plazmalardaki, çözeltilerdeki veya vücudumuzdaki hücrelerin zarlarından geçen genel devrelerde olabilecek şeyler için güzel basit bir model.

Devredeki metal teller, yüklerin sürtünme kuvvetlerine karşı hareket ettiği malzeme parçaları, yani *dirençtir (rezistans)*. Devrede işlevi yükleri birbirinden ayrı tutmak olan kesintiler, boşluklar (veya hava ya da başka malzemelerle dolu hacimler) olur. Bu kaynak yükler yüzünden, Gauss Kanunu gereği oluşan elektrik alanları bulunur. Bu boşluklu yük dağılımları da *kapasitörlerdir*. Eğer aynı yöndeki akımlar yükleri bir kapasitör boşluğunun karşı kenarlarına taşıyıp dururlarsa sonunda biriken yük birden boşalır (deşarj olur). Kapasitörlerin durumları, taşıdıkları yük ve alanlar zamana bağlıdır. Mühendislik tasarımı devrelerde boşalmaya engel olmak için alternatif (periyodik olarak değişen, dalgalı) akım kullanılır. Yükler ve akımlar, yük boşalması olmadan sürdürülebilen sınır değerler arasında gidip gelirler. Bu durumda kapasitör boşluklarındaki elektrik alanları da zamana bağlı olur, kapasitör Ampère-Maxwell Kanunundaki sürülme akımı teriminin indüklediği manyetik alanları da taşır. Sığanın (kapasitansın) özelliklerini çalışmak için en basit geometri, paralel levhalı kapasitördür.

Hareket eden yükler (akımlar) manyetik alanlar yaratır (Ampère Kanunu). Akımlar genellikle zamana bağlıdır. Başka bir deyişle, hareket eden yükler doğal veya mühendislik ürünü devrelerin çoğunda, genellikle ivmelenirler. Böylece hızlar ve akımlar değişir. Bu değişken akımların yol açtıkları manyetik alanlar da zamana bağlıdır. Faraday Kanununa uygun olarak, zamana bağlı manyetik alanlar, elektrik alanları indükler. Zamana bağlı akımların olduğu devre parçaları, indüklenen voltaj

(indüklenmiş elektromanyetik alanlar) taşırlar. Bu tür devre parçaları *indüktörlerdir*. En basit manyetik alan geometrisi, çubuk mıknatısınkidir. Bunu bir sarmal bobin sağlar. Zamana bağlı akım taşıyan sarmal bobin de en basit indüktör örneğidir.

Her devre parçası, direnç, sığa ve indüksiyon özelliklerini aynı anda bünyesinde taşır. 26. Bölümdeki paralel levhalar hem elektrik hem manyetik alan taşıyordu; bunların hem sığası hem indüktansı vardır. Biz işi basitleştirmek için ideal iletken levhaları ele aldık, ama gerçek maddelerin bir miktar direnci de oluyor. 26. Bölümdeki paralel levhalar gibi elektromanyetik dalgaları belirli yönlerde iletmek üzere tasarlanan devrelere *dalga kılavuzu* deniyor. Evlere kablolu televizyon bağlantısını taşıyan *eş eksenli kablo* da bir dalga kılavuzu örneğidir. Bir dalga kılavuzunun yayın özellikleri, belli frekanslardaki elektromanyetik dalgaları ne kadar geçirdiği, ne kadar emdiği, ne kadar yansıttığı, bu kılavuzun *empedansıdır*. Empedans, dalga kılavuzunun malzeme duvarlarının, bunun içindeki ve çevresindeki malzemenin, hava, vakum, artık her neyse onun, kapasitans, indüktans ve rezistans özelliklerinin bir birleşimine bağlıdır. Sonlu uzunlukta bir dalga kılavuzu, mesela bütün kenarları kapalı olan metal bir kutu da, sınırlarında enerjinin nasıl verildiğine, voltajların nasıl uygulandığına bağlı olarak oluşan elektromanyetik dalga desenleri sağlayabilir. Böyle bir devre öğesine *rezonant boşluk* veya *rezonatör* deniyor.

Bir devrenin, yük, akım ve elektromanyetik alan dağılımlarının özel bir desende osilasyon yaptıkları bazı özel *doğal* frekansları olabilir. Doğal frekanslar devrenin kapasitans, indüktans ve rezistans özelliklerine bağlıdır. Devre bu doğal frekanslarda, yani *normal kiplerinde* osilasyon yaparken, frekansları devrenin doğal frekansları olan elektromanyetik dalgalar yayar. Bunun tersine, eğer devreye bu özel doğal frekanslarda elektromanyetik dalgalar ulaşırsa devre bu dalgalardaki enerjiyi etkin bir şekilde emer ve osilasyon yapan yüklerle akımların buna karşılık gelen özel biçimlerdeki hareketleri ortaya çıkar. Buna *rezonans* denir.

Maddenin temel kuantum mekanik özelliklerini kullanan özel tasarımlı devre öğeleri modern teknolojinin can damarıdır. Buna çok önemli bir örnek, rezistans özellikleri voltaj sinyalleriyle ayarlanabilen transistördür. Çok sayıda transistör, kapasitör, indüktör ve rezistörden oluşan entegre devreler geliştirildi ve bu devreler entegrasyonda ileri derecede karmaşık, tek tek parçalarda ise çok küçük boyutlara getirildi. Kuantum mekanik malzemenin ve nano ölçülerdeki (10^{-9} m) inorganik ve biyolojik "devre öğelerinin" elektromanyetik özelliklerinin anlaşılması, hem temel bilimlerde hem de uygulamalı bilimler ve mühendisliklerde çok faal bir araştırma alanı. Zamana bağlı yük ve akım dağılımları, zamana bağlı birbirine bağlı elektrik ve manyetik alanlara kaynak oluyor, bunlar da Lorentz kuvveti ile bölgesel yük ve akımları etkiliyorlar. Zamana bağlı alanlar, 26. Bölümde gördüğümüz gibi, elektromanyetik dalgalar halinde yayılıp gidiyor. Bu elektromanyetik dalgalar, onları oluşturmuş olan ilk devreden çok uzaktaki yükler üzerinde iş yapabiliyor. *Elektromanyetik alanlar enerji depolayabilir ve taşıyabilir.* Devrelerde ve

bunların elektromanyetik alanlarında enerji depolamanın ve harcamanın yolları, devrenin en basit rezistans, kapasitans ve indüktans öğelerini ve bunların sağladığı voltajları inceleyerek anlaşılabilir.

27.1 OHM KANUNU

Bir **E** elektrik alanında hareket eden q yüküne ve m kütlesine sahip bir parçacık düşünün. Eğer bu yük vakumda hareket ediyorsa onu yalnızca elektrik alan etkileyebilir. Newton'un İkinci Kanununa göre anlık ivme şöyle:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{q\mathbf{E}(\mathbf{r}(t))}{m}$$

Burada $\mathbf{E}(\mathbf{r}(t))$, yükün anlık konumu $\mathbf{r}(t)$'deki elektrik alanı. Gerçek dünyada yük daima maddi bir ortamda, başka yüklü veya nötr parçacıklarla beraber bulunuyor ve bunlarla etkileşime giriyor. Bir bakır telden akan elektronlar da, bir çözeltideki veya plazmadaki iyonlar da sürekli olarak başka parçacıklarla çarpışıyorlar. Yükler elektrik alanında ivmeleniyor ama bir yandan da kazandıkları hızı çarpışmalarla kaybediyorlar, her çarpışmada hızın yönü sapabiliyor. Bütün çarpışmaların ortalama etkisini, harekete karşı işleyen bir sürtünme kuvveti temsil ediyor. Bu kuvvet, hareketin alan yönündeki kinetik enerjisini, elektrik alan tarafından yapılan işle kazanılan enerjiyi, rasgele yönlerde kinetik enerjiye, yani ısıya dönüştürüyor. Sürtünme kuvvetinin sıradan devre de dahil olmak üzere pek çok sistemde rastlanan, sık görülen ama evrensel olmayan ortalama bir biçimi şu:

$$\mathbf{F}_f = -\alpha\mathbf{v}$$

Elektrik alan olmazsa, hızda doğrusal olan böyle bir sürtünme kuvveti, 11. Bölümde gördüğümüz basit üssel frenlemeye yol açıyor:

$$\mathbf{F}_f = -\alpha\mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\mathbf{v} \equiv -\frac{\mathbf{v}}{\tau}$$

Buradaki $\tau \equiv m/\alpha$'ya frenleme zamanı deniyor. τ'nun fiziksel anlamı, çarpışmalar arasındaki ortalama süre. Hareket denklemine hem elektrik kuvveti hem de sürtünme kuvvetini katınca şunu elde ediyoruz:

$$\mathbf{F}_{toplam} = q\mathbf{E} - \alpha\mathbf{v} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{27.1}$$

Kuvvetler birbirini tam olarak dengelediğinde net toplam kuvvet ve dolayısıyla ivme sıfır oluyor. Bu "*kararlı durumda*" hız artık sabit, değişmiyor. Bu sabit kararlı hız,

$$\mathbf{v}_0 = \frac{q\mathbf{E}}{\alpha} = \frac{q\mathbf{E}\tau}{m} \tag{27.2}$$

Öyleyse elektronların akım taşıdığı bir telde, elektronların ortalama hızı *(*v*)* şudur:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{-e\mathbf{E}\tau}{m} \tag{27.3}$$

Birim hacimde hareket eden *n* tane elektron varsa, akım yoğunluğu **j** şöyle olur:

$$\mathbf{j} = n(-e)\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{ne^2\tau}{m}\mathbf{E} \equiv \sigma\mathbf{E} \tag{27.4}$$

Ohm Kanununun temel ifadesi budur. Akım yoğunluğu elektrik alanla orantılıdır. Orantı sabiti $\sigma \equiv ne^2\tau/m$, maddi ortamın *iletkenliğidir*. Örneğin, kesit alanı *A* olan bir bakır telden geçen toplam akım *I*;

$$I = jA \tag{27.5}$$

ve telin bir *l* uzunluğunda elektrik alan yönündeki voltaj farkı *V* de

$$V = El. \tag{27.6}$$

Son üç denklemden, Ohm Kanununun makroskobik biçimi (devre biçimi) elde ediliyor:

$$V = \frac{l}{\sigma A}I \equiv \frac{\rho\, l}{A}I \equiv RI \tag{27.7}$$

Buradaki $\rho \equiv \sigma^{-1}$ *direnirlik*, *R* de *direnç (rezistans)*. Rezistansın SI birimine Alman fizikçi Ohm'un adı verilmiş:

1 Ohm (Ω) = 1 Volt/Amper.

Bir kez daha dikkat çekelim, Ohm Kanunu yalnızca sürtünme kuvvetinin hıza *doğrusal* bağımlı (orantılı) olduğu durumlarda geçerli. Eğer sürtünme kuvvetinin hıza doğrusal olmayan bir bağlılığı varsa, ki birçok devrede böyle olur, ortalama hız ve akımın bir kararlı hal değeri vardır, fakat bu **j** ile **E** arasında ve *V* ile *I* arasında doğrusal olmayan bir ilişki kurar, bu ilişki de (*akım-voltaj karakteristiği*) Ohm Kanunundakinden farklıdır. Ohm Kanununun açıkladığı basit doğrusal durum yine de uygulamadaki pek çok devre için geçerlidir.

27.2 İŞ, ENERJİ, GÜÇ

Minicik bir dq yükünü bir P_1 noktasından bir P_2 noktasına hareket ettiren elektrik alanın yaptığı küçük iş dW_E;

$$dW_E = \int_1^2 \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{dl} = dq \int_1^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = U(1) - U(2) = dq[V(1) - V(2)] = V dq \quad (27.8)$$

V, ilk nokta P_1'in son nokta P_2'ye göre voltaj farkı. Devreye dt zaman içinde giren dq kadar yük üzerinde elektrik alanın P_1 ve P_2 noktaları arasında yaptığı işin zamana göre değişimi (elektrik alanının *harcadığı güç*) oluyor:

$$P_E \equiv \frac{dW_E}{dt} = V \frac{dq}{dt} = VI \quad (27.9)$$

Gücün, yani yapılan işin zamanla değişiminin ya da enerjinin artış veya azalış hızının SI birimi Watt'tır (Sanayi devrimine yol açan gelişmiş buhar motorunu icat eden Sir James Watt onuruna).

1 Watt (W) ≡ 1 Joule/saniye (J/s).

Dirençli devre öğelerinde, elektrik alanı tarafından yapılan iş pozitif iken, sürtünme tarafından yapılan iş negatif ve elektrik alanı tarafından yapılan işle aynı büyüklükte. Akım taşıyıcı yüklerin ortalama hızı sabit kalıyor. Sürtünme dediğimiz çarpışmalar hep birlikte, elektrik alanı tarafından yapılan işi, rasgele yönlerdeki yüklerin hareketinin mikroskobik kinetik enerjisine aktarıyorlar; bir başka deyişle *ısı* oluşuyor, veya enerji *dağılıyor*. Enerjinin korunumu gereği, ısı üretim hızı, elektrik alanının iş yapma hızıyla, güç $P_E = V\,I$ ile aynı. Ohm Kanunu geçerli ise ısı üretimi için güç şöyle:

$$P_E = VI = \frac{V^2}{R} = I^2\,R \quad (27.10)$$

27.3 ELEKTRİK ALANDA DEPOLANAN ENERJİ

Bir paralel levha kapasitörü düşünün, aralarında D uzaklığı bulunan A yüzey alanlı levhalarında $\pm Q$ yük ve $\pm\sigma$ yük yoğunluğu olsun. Düzenli elektrik alanı

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0\,A} \quad (27.11)$$

ve levhaları arasındaki voltaj farkı

$$V = E\,D = \frac{Q\,D}{\epsilon_0\,A} \quad (27.12)$$

olan bu kapasitör, birbirinden ayrı tutulan yükler tarafından oluşturulan elektrik alanının en basit örneklerinden biridir. Elektrik alanlarının ve voltajların kaynak yüke doğrusal bağlılığı, *sığa* (kapasitans) C'nin, kaynak yük ile voltaj arasındaki orantı sabitinin, 21. Bölümde gördüğümüz gibi,

$$V \equiv \frac{Q}{C} \tag{27.13}$$

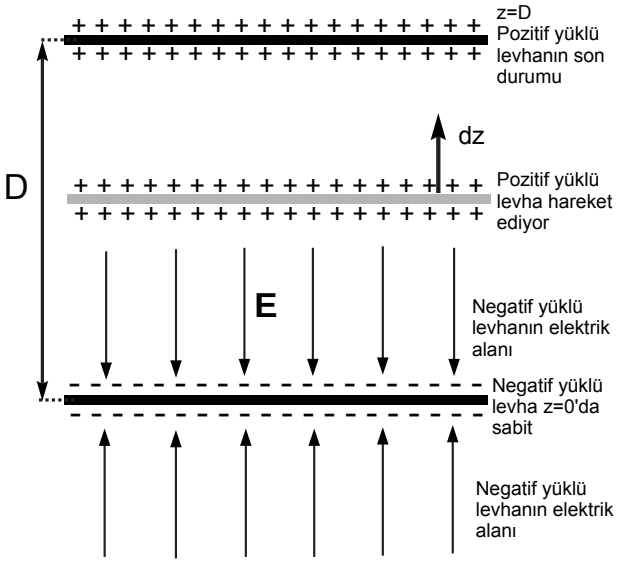
ilişkisiyle tanımlanmasına neden olur. Denklem 27.12'den yola çıkarak, paralel levha kapasitörünün sığası şöyle:

$$C_{paralel\ levha} = \frac{\epsilon_0\ A}{D} \tag{27.14}$$

Paralel levha kapasitörünün birbirine zıt yüklü levhaları Coulomb kuvvetiyle birbirlerini çekiyorlar. Levhaları birbirinden ayrı tutmak için bu doğrudan Coulomb kuvveti dışındaki kuvvetler kullanılıyor, bunun tipik örneği, levhaları destekleyen malzemelerin katılığını veren maddi kuvvetler. Eğer Coulomb kuvvetinden (elektrostatik kuvvetten) başka kuvvet olmasaydı levhalar birbirine doğru ivmelenir, birbirine değer ve nötr olurdu. Demek ki kapasitörün pozitif bir elektrostatik potansiyel enerjisi var ve levhalar serbest bırakacak olursa Coulomb kuvvetinin etkisi altında birbirilerine doğru ivme kazanmalarıyla bu enerji kinetik enerjiye dönüşecek. Birbirinden D uzaklıktaki paralel iki kapasitör levhasının elektrostatik potansiyel enerjisi, yük dağılımını bir ilk durumdan başlayıp son D uzaklığına taşıyarak, bu süreçte elektrostatik kuvvet tarafından yapılan işi hesaplayarak çeşitli şekillerde bulunabilir: İlk ve son durumlar arasındaki potansiyel enerji farklı, sistemi ilk durumdan son duruma taşırken hangi yolun kullanıldığına bağlı değil. İlk durumu, pozitif yüklü levhanın negatif yüklü levhanın hemen üstünde durduğu, negatif levha ile arasında neredeyse sıfır veya çok az ayırım uzaklığı olduğu durum olarak alalım. Şimdi negatif yüklü levhayı sabit tutup pozitif yüklü levhayı D uzaklığına kadar götürelim, bu hareket boyunca, Şekil 27.1'de gösterildiği gibi pozitif yüklü levhayı negatif yüklüye daima paralel tutalım. Pozitif levhadaki her birim yük üzerinde *negatif yüklü levhadan kaynaklanan elektrik alanı tarafından* aynı miktarda iş yapılıyor. 21. Bölümde çıkardığımız üzere, negatif yüklü levhadan kaynaklanan düzgün elektrik alanı levhalara paralel; negatif yüklü levhaya yönelik
ve

$$E' = \frac{\sigma}{2\ \epsilon_0} = \frac{Q}{2\ \epsilon_0\ A} \tag{27.15}$$

büyüklüğüne sahip. $z = 0$'da sabit tutulan negatif yüklü levhanın elektrostatik kuvveti tarafından, pozitif yüklü levha $z = 0$'dan $z = D$'ye giderken bu levha üzerinde yapılan toplam iş, iki durum arasındaki potansiyel enerji farkını veriyor:



Şekil 27.1

$$U(z=0) - U(z=D) = \int_0^D \mathbf{F}' \cdot \mathbf{dz} \tag{27.16}$$

Ufacık "adım" yer değiştirme vektörü z yönünde $\mathbf{dz} = dz\ \mathbf{k}$ ve levhalara dik. Negatif yüklü levhanın $+Q$ yüklü pozitif levha üzerinde uyguladığı $\mathbf{F}'$ elektrostatik kuvvet,

$$\mathbf{F}' = +Q\mathbf{E}' = +Q(-E'\mathbf{k})$$

Referans potansiyel enerjiyi sıfır olarak alırsak, $U\,(z = 0) = 0$ şunu buluyoruz:

$$U(z=D) = QE'D = \frac{Q^2\ D}{2\ \epsilon_0\ A} = \frac{Q^2}{2\ C} = \frac{1}{2}\ CV^2 \tag{27.17}$$

Burada sığanın tanımını, yük Q'nun voltaj V ile ilişkisini veren Denklem 27.13'ü ve paralel levha sistemi için sığanın değerini veren Denklem 27.14'ü kullandık. Bu potansiyel enerji, yüklerin ayrışmasından dolayı, yükler tarafından kurulan elektrik alanından dolayı var. Enerji, levhaların arasındaki toplam elektrik alanı büyüklüğü

$$E = \frac{V}{D} = \frac{Q}{\epsilon_0\ A}$$

cinsinden ifade edilebilir, zira

$$U = \frac{1}{2}\, CV^2 = \frac{1}{2}\, \epsilon_0\, E^2\, A\, D \tag{27.18}$$

Bu demektir ki elektrik alanında depolanan enerji, birim hacim başına u_E *enerji yoğunluğuna* sahip:

$$u_E = \frac{1}{2}\, \epsilon_0\, E^2 \tag{27.19}$$

Vakumdaki elektrik alanların enerji yoğunluğuna dair bu ifadenin genel olarak doğru olduğu, paralel levha kapasitörüyle sınırlı olmadığı gösterilebilir.

27.4 MANYETİK ALANDA DEPOLANAN ENERJİ

Bir sarmal bobin düşünün, bobinin uzunluğu *h* boyunca *N* defa dolanan sarımların- dan *i* akımı geçiyor olsun (birim uzunluk başına *n* = *N/h* sarım). Sarmal bobinin içindeki manyetik alan, bobinin eksenine paralel ve 22. Bölümün 6. Probleminde çıkardığımız üzere

$$B = \mu_0 n i \tag{27.20}$$

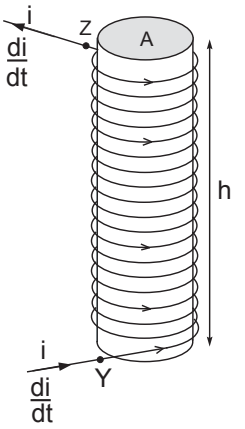
değerine sahip. Sarmalından *i* akımı geçen bobinin bu düzenini kurmak için ne kadar enerji lazım? Başlangıçtaki düzende hiç akım olmadığını farz edin. Akımın *di/dt* oranında arttığını hayal edin. Faraday Kanununa göre, değişen akım ve bunun sonucunda bobinin manyetik alanında oluşan değişme tel boyunca voltaj indükleyecek. Bu voltajın yönü, *di/dt*'nin yönüne, dolayısıyla son akım *i*'nin yönüne ters. Şekil 27.2'de *Y* noktasından *Z* noktasına *i* ve *di/dt*'nin yönünü pozitif olarak alırsak, bu iki nokta arasındaki voltaj farkı,

$$V \equiv V(Z) - V(A) = -L\, \frac{di}{dt} \tag{27.21}$$

Sarmal bobin için *indüktans L*,

$$L_{bobin} = \mu_0 n N A = \mu_0\, n^2\, A\, h \tag{27.22}$$

Buradaki *A*, sarmal bobinin kesit alanıdır (22. Bölümde 6. Probleme bakın). Sarmal bobinin içinde akımı oluşturma süreci boyunca pek çok *dq* yükü bobinin içinden, *Y* noktasından *Z* noktasına hareket ediyor. Bobindeki indüklenmiş elektrik alanın yönü *Z*'den *Y*'ye doğru. Eğer başka hiçbir kuvvet olmasaydı indüklenmiş elektrik alan *dq* yüklerini gerisin geri *Y*'ye doğru ivmelendirecekti. İndüklenmiş elektrik alan tarafından yapılan iş



Şekil 27.2

$$dW_{E,ind} = V\,dq = -L\frac{di}{dt}\,dq = -L\,i\,di$$

Burada *dq/dt*'nin anlık akım *i*'den başka bir şey olmadığına dikkat ettik. *dq* yüklerinin bobinde yukarı doğru, *Y*'den *Z*'ye doğru hareketi, indüklenen elektrik alandan daha başka kuvvetlere, mesela devrenin başka bir yerindeki bir pil gibi uzaktaki kaynakların neden olduğu elektrik alanlarına bağlıdır. Bu diğer kuvvetlerin yaptığı iş, indüklenmiş elektrik alanı tarafından yapılan işin tersidir, böylece sarmal bobinin enerjisindeki artış

$$dW = L\,i\,di$$

olur, bu da akım 0'dan kurulup *i*'ye varırken bobinde biriken toplam enerjinin

$$\mathcal{E} = \int_0^i dW = \int_0^i L\,i'\,di' = \frac{1}{2}L\,i^2 \tag{27.23}$$

olmasını sağlar. Bu depolanmış enerji, bobinin içindeki manyetik alan *B* cinsinden, Denklem 27.20 ve Denklem 27.22 kullanılarak şöyle ifade edilebilir:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}L\,i^2 = \frac{1}{2}\mu_0\,n^2\,A\,h\,i^2 = \frac{1}{2\,\mu_0}\,B^2\,A\,h \tag{27.24}$$

Birim hacim başına depolanan enerji,

$$u_B = \frac{1}{2\,\mu_0}\,B^2 \tag{27.25}$$

u_B, manyetik alandaki enerji yoğunluğudur. *Bu enerji yoğunluğu her türlü manyetik alanda birikebilir, yukarıdaki ifade yalnız sarmal bobinle sınırlı değildir.*

27.5 ELEKTROMANYETİK DALGALARDAKİ ENERJİ

26. Bölümde işlenen paralel sonsuz levhalar arasındaki uzayda elektromanyetik dalgalar şu elektrik ve manyetizma bileşenleriyle gidiyorlar:

$$\begin{aligned} E_z(x,t) &= E_0 \cos(kx - \omega t) \\ B_y(x,t) &= B_0 \cos(kx - \omega t) \\ B_0 &= -\frac{E_0}{c}. \end{aligned}$$

Elektrik alanda *t* zamanında ve uçlardan *x* uzaklıktaki noktalarda enerji yoğunluğu şöyle:

$$u_E(x,t) = \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,E(x,t)^2 = \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \qquad (27.26)$$

Zamanla $\cos^2(kx\ \ \omega t)$ 0 ile 1 arasında gidip geldikçe herhangi bir *x* noktamızdaki bu enerji yoğunluğu da 0 ile $\frac{1}{2}\epsilon_0\ E_0^2$ arasında değişip duracak. Bunun zaman içindeki ortalama değeri ise

$$< u_E >= \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,E_0^2 < \cos^2(kx - \omega t) >= \frac{1}{4}\,\epsilon_0\,E_0^2 \qquad (27.27)$$

çünkü zamana göre ortalama değer $< \cos^2(kx - \omega t) >= 1/2$. Elektromanyetik dalgalar sürekli gelip geçerken, elektrik alanındaki enerji yoğunluğunun zaman içinde ortalama değeri, dalga kılavuzunun yarısonsuz paralel levhaları arasında *x*'ten bağımsız olarak bütün noktalarda aynı. Elektromanyetik dalgalardaki zaman içinde ortalama manyetik enerji yoğunluğu da benzer bir şekilde hesaplanabilir. Manyetik alanda *t* zamanında ve uçlardan *x* uzaklığındaki herhangi bir noktada enerji yoğunluğu

$$u_B(x,t) = \frac{1}{2\,\mu_0}\,B(x,t)^2 = \frac{1}{2\,\mu_0}\,B_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \qquad (27.28)$$

Bunun zamana içinde ortalama değeri de

$$< u_B >= \frac{1}{2\,\mu_0}\,B_0^2 < \cos^2(kx - \omega t) >= \frac{1}{4\,\mu_0}\,B_0^2 \qquad (27.29)$$

Manyetik alandaki enerji yoğunluğunun zamana göre ortalama değeri, dalga kı-

lavuzunun yarısonsuz paralel levhaları arasında x'ten bağımsız olarak bütün noktalarda aynı. Dahası, $B_0 = -E_0/c$ ve $1/c^2 = \epsilon_0\ \mu_0$ olduğu için elektrik alanları ve manyetik alanlardaki ortalama enerji yoğunlukları da birbirine eşit:

$$< u_B >=< u_E >= \frac{1}{4}\ \epsilon_0\ E_0^2 \tag{27.30}$$

Ortalama elektrik ve manyetik enerji yoğunluklarının birbirine eşit olduğu sonucu, yayılma desenleri ne olursa olsun bütün elektromanyetik dalgalar için doğru. Hem elektrik hem de manyetik alanlarda zamana göre toplam ortalama enerji yoğunluğu şöyle:

$$< u_{EM} >=< u_B > + < u_E >= \frac{1}{2}\ \epsilon_0\ E_0^2 = \frac{1}{2\ \mu_0}\ B_0^2 \tag{27.31}$$

26. Bölümde paralel yarısonsuz levhaların arasında elektromanyetik dalga yayılımı örneğinde de gördüğümüz gibi, elektrik ve manyetik alanların yönleri birbirine ve dalgaların yayılım yönüne dik, öyle ki $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ vektör çarpımı dalganın yayılma yönünde bir vektör. Bunu uygun boyutta sabitlerle çarparak enerji akısı, yani birim alandan birim zamanda geçen enerji, elektromanyetik dalgaların yayılım yönünde bir vektör olarak tanımlanıyor. Bu vektöre *Poynting vektörü* **S** denir:

$$\mathbf{S}(x,t) \equiv c\ \left(\epsilon_0^{1/2}\ \mathbf{E}(x,t) \times \frac{\mathbf{B}(x,t)}{\mu_0^{1/2}}\right) \tag{27.32}$$

Poynting akısının zamana göre ortalama değeri şöyle:

$$< \mathbf{S} >= c\ \left(\frac{\epsilon_0\ E_0^2}{2}\right) \mathbf{i} =< u_{EM} >\ c\ \mathbf{i}$$

Bu tam olarak, elektromanyetik dalgaların yayılım yönü $\hat{\mathbf{i}}$'ye dik olan herhangi bir alanda, birim zamanda birim alanda taşınan enerji. Denklem 27.32'de tanımlandığı haliyle Poynting vektörü, sadece bu örnek için değil, elektromanyetik ışımanın deseni nasıl olursa olsun, elektromanyetik dalgalar tarafından taşınan enerji akısını genelde geçerli bir ifadeyle temsil ediyor.

PROBLEMLER

1. 26. Bölümdeki yarısonsuz paralel levha dalga kılavuzundaki akımlar ve yükler:
   (a) Gauss Kanununu kullanarak, elektromanyetik dalganın elektrik alanı $E_z(x, t)$'den yola çıkıp, levhaların yük yoğunluğu $\sigma(x, t)$'yi bulun.

(b) Ampère-Maxwell Kanununu kullanarak, elektromanyetik dalganın manyetik alanı $B_y(x, t)$'den yola çıkıp levhalar üzerindeki akım yoğunluğu $\mathbf{J}(x, t)$'yi (yönünü ve birimlerini) bulun.

(c) Elektrik ve manyetik alanların genlikleri E_0 ve B_0 arasındaki ilişkiyi kullanarak $\sigma(x, t)$ ve $\mathbf{J}(x, t)$'yi E_0 cinsinden ifade edin.

(d) $\mathbf{J}(x, t)$ ve $\sigma(x, t)$'yi çizin.

(e) Yükün yerel korunumuna göre, levhaların herhangi bir yüzey öğesindeki yük ancak o yüzeye giren akım çıkan akımdan fazlaysa (azsa) artabilir (azalabilir). Bunu $\mathbf{J}(x, t)$ ve $\sigma(x, t)$ arasında bir ilişki olarak matematiksel şekilde ifade edin; $\mathbf{J}(x, t)$ ve $\sigma(x, t)$ için bulduğunuz sonuçların yükün yerel korunumunu sağlayıp sağlamadığını kontrol edin.

2. **26. Bölümdeki paralel yarısonsuz levha dalga kılavuzunda direnç:** Yarısonsuz dalga kılavuzundaki paralel levhalar gerçek iletkenlerdir, düşük bir miktar dirençleri vardır. Direncin etkisi nedir? Dalgadaki elektromanyetik alanların genliklerine, yük yoğunluklarına ve akımlara *niteliksel olarak* ne olduğunu anlatın. Bu sistem sürekli olarak dış voltaj $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ ile enerjiyle besleniyor. Bu enerji dalga kılavuzunun öbür yanına, sonsuzluğa varıyor mu? Enerjiye ne oluyor?

3. **Basit Devreler:** A ve B noktaları arasındaki voltaj farkı, yahut da birim yük A'dan B'ye taşınırken elektrik alanları tarafından yapılan iş, A'dan B'ye hangi yolun izlendiğine bağlı değil. Her kapalı devrede A ve B diye iki nokta seçip devreyi iki farklı yola ayırabilirsiniz, diyelim bunlar *soldaki* ve *sağdaki* yollar olsunlar, ikisi de A'dan B'ye gider. Farklı devre öğelerinden geçen iki yoldaki A'dan B'ye voltaj farkını birbirine eşitleyince şöyle bir denklem çıkıyor:

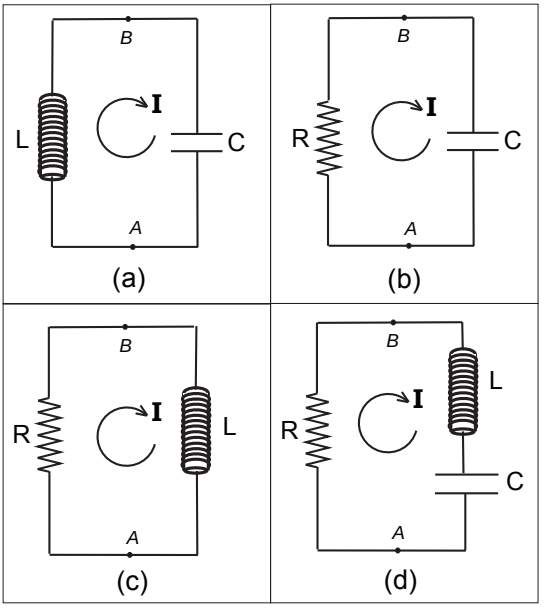
$$V_{AB,sol} = V_{AB,\text{sağ}}$$

Aynı şekilde, *devre çevresindeki* voltaj farkı, diyelim soldaki yoldan A'dan B'ye, sonra sağdaki yoldan gerisin geri B'den A'ya gittiğinizde, sıfır olur:

$$V_{AB,sol} + V_{BA,\text{sağ}} = V_{AB,sol} - V_{AB,\text{sağ}} = 0$$

Böyle devre denklemleri devrenin rezistans, kapasitans ve indüktans parametrelerini kapsar ve yükleri, akımları ve bunların zamana göre türevlerini birbirileriyle ilişkilendirir, böylece devrenin dinamiklerini tanımlar. Şekildeki devrede oklar, akımın (+) yönü *seçimimizi* gösteriyor. Devre tanımlanan yöne göre ters yönde (negatif) veya yön değiştiren (alternatif) akımlar da taşıyabilir.

(a) Devrenin indüktansı L ve $V_{AB,sol} = -LdI/dt$; kapasitansı da C, ve $V_{AB,\text{sağ}} = Q/C$ (Şekil (a)). Devre denklemini $Q(t)$ ve onun türevleri cinsinden, $I = dQ/$



dt eşitliğinden faydalanarak yazın. Eğer başlangıçta kapasitör levhalarına $\pm Q_0$ yükleri yerleştirildiyse ve akım yoksa, $Q(t)$ ve $I(t)$'nin çözümleri nedir? Başlangıç koşulları $Q(t = 0) = Q_0$ ve $I(t = 0) = 0$.

(b) Devrenin rezistansı R, $V_{AB,sol} = -RI$; sığası C, $V_{AB,sağ} = Q/C$ (Şekil (b)). Devre denklemini $Q(t)$ ve türevi cinsinden, $I = dQ/dt$ eşitliğini kullanarak yazın. Eğer başlangıçta kapasitör levhalarına $\pm Q_0$ yükleri konduysa, ilk koşul $Q(t = 0) = Q_0$ ise, $Q(t)$ ve $I(t)$ çözümleri nedir?

(c) Devrenin direnci R, $V_{AB,sol} = -RI$; indüktansı ise L, $V_{AB,sağ} = LdI/dt$ (Şekil (c)). Devre denklemini $I(t)$ ve türevi cinsinden yazın. Eğer ilk akımın değeri $I(t = 0) = I_0$ ise $I(t)$'nin çözümü nedir?

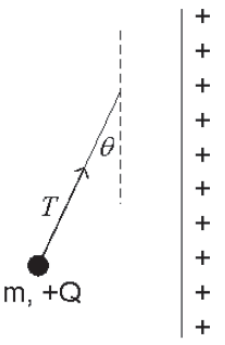
(d) * *Bu soruyu çözmek için karmaşık (kompleks) sayıları bilmek gerekiyor*. Devrenin direnci R, $V_{AB,sol} = -RI$, kapasitansı C, indüktansı L, öyle ki $V_{AB,sağ} = Q/C + L\, dI/dt$ (Şekil (d)). Devre denklemini $Q(t)$ ve türevleri cinsinden, $I = dQ/dt$'yi kullanarak yazın. İlk şartlar $Q(t = 0) = Q_0$ ve $I(t = 0) = I_0$ ise, $Q(t)$ ve $I(t)$'nin çözümleri ne?

İpucu: $Q(t) = Q_0 \exp(\lambda\, t)$ biçiminde bir çözüm bulmaya çalışın. Bazı devrelerde λ parametresinin bir *karmaşık sayı* olduğunu göreceksiniz. λ'nın *gerçek* olmasının şartları ne? *Karmaşık* olmasının şartları? Ya *yalın sanal sayı* olmasının? Bu durumların her birinde $Q(t)$ ve $I(t)$ çözümleri nasıl oluyor?

28

Ek Sorular – Elektrik ve Manyetizma

1. Yükü $+Q$, kütlesi m olan bir noktasal parcacık, Şekil 28.1'de görüldüğü gibi yük yoğunluğu $+\sigma$ olan sonsuz bir yük tabakasının yanına bir iple asılıyor. Kütle, sabit bir θ açısıyla durur vaziyette (dengede).



Şekil 28.1

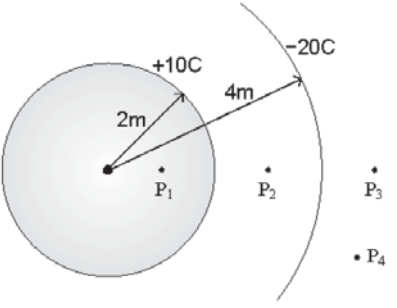
(a) Gauss Kanununu kullanarak sonsuz yük tabakasından kaynaklı elektrik alan **E**'yi bulun.

(b) Noktasal parçacığın serbest cisim diyagramını çizin ve bütün kuvvetleri belirtin.

(c) İp üzerindeki gerilim T'yi bulun (cevaplarınızı sin θ, cos θ veya tan θ cinsinden verebilirsiniz).

2. Şekil 28.2'de merkezde +5 C yük ile, merkezleri aynı olan, 2 m ve 4 m yarıçaplı, sırasıyla +10 *Coulomb* ve −20 *Coulomb* yük taşıyan iki küresel iletken kabuk görülüyor.

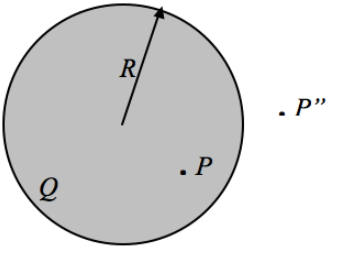
Gauss Kanununu kullanarak şekilde gösterilen P_1, P_2, P_3 ve P_4 noktaların-



Şekil 28.2

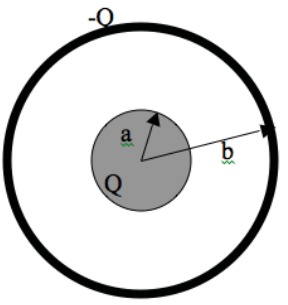
da elektrik alanının büyüklüğünü ve yönünü bulun. Bu noktaların merkezden uzaklığı, P_1: 1 m, P_2 : 3 m, P_3 ve P_4 : 5 m. Cevaplarınızı $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$ cinsinden ifade edin; K'nin sayısal değerini kullanmayın.

3. Bir miktar pozitif yük Q, R yarıçaplı bir kürenin içinde homojen dağılmış (Şekil 28.3).
   (a) Bu kürenin içindeki yük yoğunluğu ρ nedir?
   (b) Gauss Kanununu kullanarak kürenin içindeki bir P noktasında ($r < R$) elektrik alanının büyüklüğünü bulun (Şekle bakın).
   (b) Gauss Kanununu kullanarak kürenin dışındaki bir P'' noktasında ($r > R$) elektrik alanının büyüklüğünü bulun (Şekle bakın).



Şekil 28.3

4. Q toplam yükünün hacimde homojen dağıldığı, a yarıçapında katı bir yalıtkan kürenin etrafını, onunla eşmerkezli, b yarıçapında ince bir küresel kabuk sarmış. Şekil 28.4'te görüldüğü gibi bu ince küresel kabuğun taşıdığı toplam yük $-Q$ kabuğun yüzeyine homojen bir şekilde dağılmış. Gauss Kanununu kullanarak aşağıdaki bölgelerde elektrik alan $\mathbf{E}(r)$'yi (büyüklük ve yön) bulun.



Şekil 28.4

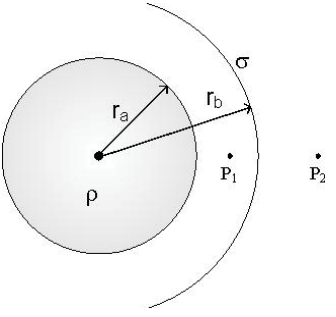
(a) $r > b$

(b) $a < r < b$

(c) $r < a$

(d) İki kabuk arasındaki ($r = a$ ve $r = b$ arasındaki) voltaj farkı ne kadardır?

5. Homojen yük dağılımına sahip katı bir kürenin yarıçapı r_a, hacim yük yoğunluğu ρ. Onunla eşmerkezli, homojen yüzey yük yoğunluğu σ ve yarıçapı r_b olan bir küresel kabuk var (Şekil 28.5).



Şekil 28.5

(a) P_1'deki elektrik alanı $\mathbf{E}_1$'i bulun.

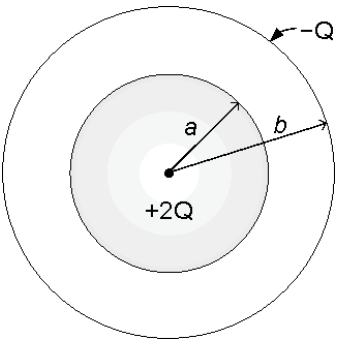
(b) P_2'deki elektrik alanı $\mathbf{E}_2$'yi bulun.

(c) P_2'de m kütleli bir +q nokta yükünü düşünün. Yük üzerindeki kuvvet **F** ve ivme a nedir?

[Unutmayın: Vektörlerin büyüklüğü ve yönü olur.]

6. Şekil 28.6'da gösterildiği gibi a yarıçaplı içi dolu bir küreye $+2Q$ yük homo-

jen bir şekilde dağılmış. Bir $-Q$ yükü de, b yarıçapında eşmerkezli çok ince bir küresel kabuğa homojen dağılmış. Aşağıdaki alanlar için Gauss Kanununu kullanarak elektrik alanı vektörü **E**'yi bulun:



Şekil 28.6

(a) $r < a$

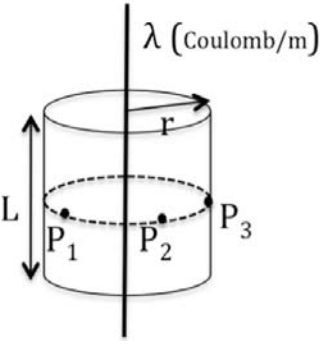
(b) $a < r < b$

(c) $r > b$

(d) r'nin fonksiyonu olarak elektrik alanını çizin.

7. Şekil 28.7'de görüldüğü gibi, sonsuz bir düz telin boylu boyunca yük yoğunluğu $\lambda = -2000\pi\epsilon_0$ Coulomb/m.

   (a) Silindirdeki elektrik alanının yönü nedir? Şekilde, silindirin üzerindeki P_1, P_2 ve P_3 noktalarındaki elektrik alanı vektörlerini gösterin.



Şekil 28.7

(b) Silindirik yüzeyden geçen elektrik alanı **E**'nin akısı nedir?

(c) Üst ve alt yüzeylerden geçen elektrik alanının akısı nedir?

(d) Gauss Kanununu kullanarak, telden $r = 1$ m uzaklıkta elektrik alanın gücü **E**'yi bulun.

8. m kütlesine ve $+q$ yüküne sahip bir parçacık, z yönündeki homojen bir manyetik alanda hareket ediyor ($\mathbf{B} = B\mathbf{k}$). Buna ek olarak yine z yönünde bir elektrik alanı var, $\mathbf{E} = E\mathbf{k}$. Parçacığın $t = 0$ zamanındaki hızı $v(0) = v\mathbf{i} + u\mathbf{k}$. x, y, z yönlerindeki birim vektörler sırasıyla **i**, **j**, **k** ile gösteriliyor. Lorentz kuvveti $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B})$.

   (a) $t = 0$'da ivme vektörü $\mathbf{a}(0)$ ne kadar?

   (b) Parçacık nasıl bir yol izliyor? Bir çizim yapın.

   (c) x-y düzlemindeki dairesel hareketin açısal frekansı ω kaç?

   (d) x-y düzlemindeki hareketin yarıçapı kaç?

9. (a) Şekil 28.8(a)'da Z uzunluğunda bir sarmal bobin görülüyor. Akım I sabit. Manyetik alan çizgilerini çizin.

   (b) Şekil 28.8(b)'de sonsuz bir sarmal bobin görülüyor. Sonsuz bobin için kurulan yaklaşıklıkta *bobinin dışındaki manyetik alan sıfırdır*. Gösterilen kapalı halka ile Ampère Kanununu kullanarak sarmal bobinin içindeki manyetik alanın gücü için bir ifade bulun.

   (c) (b)'de bulduğunuz sonucu kullanarak, $I = 1/4\pi$ *Amper* sabit akım taşıyan telin metrede 10^7 defa sardığı sonsuz sarmal bobinin içindeki manyetik alanın değerini SI birimiyle (Tesla) hesaplayın. Verilen: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (Tesla metre/Amper).

   (d) Zamana bağlı bir $I(t) = 0,5 \cos(100\pi t)$ akımı sonsuz uzunlukta bir sarmal bobinden geçiyor. Şekil ?? üzerinde elektrik ve manyetik alanların yönlerini ve gösterilen noktalarda elektromanyetik dalgaların yol alma yönünü çizin.

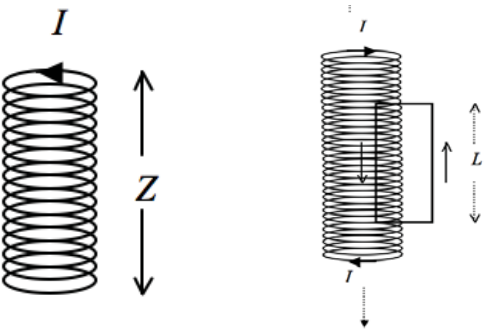
10. Homojen manyetik alan **B**, Şekil 28.9'da gösterildiği gibi x yönünde. Yarıçapı a olan küçük bakır bir daire y ekseninde ω açısal frekansıyla dönüyor.

    (a) Zamanın fonksiyonu olarak dairenin içinden geçen manyetik akıyı bulun.

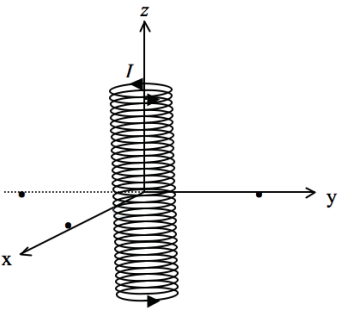
    (b) Dairenin çevresinde indüklenen "elektromotor kuvvetini" (voltajı) zamanın bir fonksiyonu olarak bulun.

11. Yarısonsuz iki paralel iletken levha, uçlarda zamana bağlı $V(t) = A \cos \omega t$ voltaj farkında sahip (Şekil 28.10).

    (a) Levhaların arasındaki elektrik alanı yönlerini çizin.



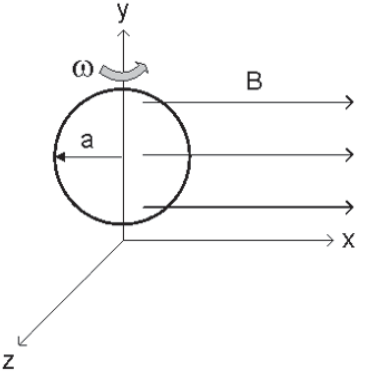
(a) (b) Sonsuz bobin



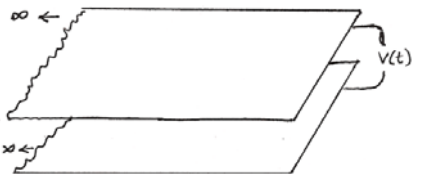
$I(t) = 0.5 \cos(100 \pi t)$

(c) Sonsuz bobin

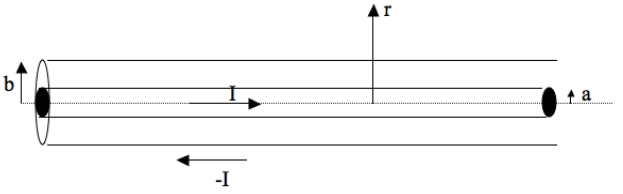
Şekil 28.8



Şekil 28.9



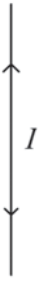
Şekil 28.10



Şekil 28.11

$I(t) = I_0 \cos \omega t$

Şekil 28.12



Şekil 28.13

(b) Levhaların arasındaki manyetik alan yönlerini çizin.

(c) Levhaların arasında elektromanyetik dalgaların yayılım yönünü çizin.

(d) Frekans $f = \omega/2\pi = 3 \times 10^6\ s^{-1}$ ise elektromanyetik dalganın dalga boyu kaçtır?

Işık hızı $c = 3 \times 10^8\ m/s$.

12. Şekil 28.11'de a yarıçaplı düzgün metal telden yapılmış eş eksenli bir kablo ile, sonsuz uzunlukta, b yarıçapında ince iletken bir silindirik kabuk görülüyor. Sabit elektrik akımı I, homojen akım yoğunluğu $j = I/\pi a^2$ ile telden geçiyor. Sabit elektrik akımı $-I$ da eş eksenli kabuğun yüzeyinden akıyor. Ampère Kanununu kullanarak, eksenden r uzaklıktaki bir noktada aşağıdaki durumlarda manyetik alanın büyüklüğünü ve de yönünü bulun;

(a) $r < a$

(b) $a < r < b$

(c) $r > b$

(d) Eğer I ve $-I$ akımları sabit değil de zamana bağlı (dalgalı akım) olurlarsa eş eksenli kablo elektromanyetik dalgalar ışır. Bu dalgaların yayılma yönünü şekil üzerinde çizerek gösterin.

13. Sonsuz uzunlukta düz bir tel düşünün:

(a) Eğer telin sabit pozitif yük yoğunluğu λ (Coulomb/m) varsa, Gauss Kanununu kullanarak telden r uzaklıktaki elektrik alanını (büyüklüğünü ve yönünü) belirtin.

(b) Eğer tel nötrse ama I sabit akımını taşıyorsa, Ampère Kanununu kullanarak telden r uzaklıkta manyetik alanı (büyüklüğünü ve yönünü) belirtin.

(c) Şimdi de akım $I(t) = I_0 \cos \omega t$, dalgalı olursa ne olacağını düşünün (Şekil 28.12). Elektrik alanı ve manyetik alan yönlerini ve telin çevresindeki alanda elektromanyetik dalgaların yayılım yönlerini çizin.

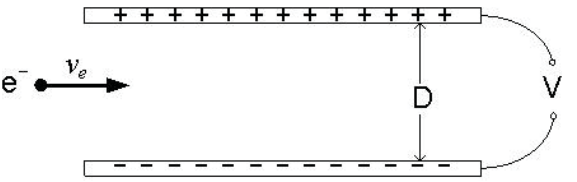
14. Bir dalgalı akım $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ sonsuz bir düz telden geçiyor (Şekil 28.13). Dalgalı akım frekansı $f = 50$ Hz.

(a) Bu akımın uzayda meydana getirdiği, zamana bağlı manyetik ve elektrik alanları şeklin üstüne çizin.

(b) Elektromanyetik dalgaların yayılım yönlerini çizin.

(c) Bu elektromanyetik dalgaların açısal frekansı ω nedir?

(d) Dalgaların vakumda yayıldıklarını farz edersek dalga sayısı k ve dalga boyu λ kaçtır? Vakumda ışık hızı $c = 3 \times 10^8$ m/s.



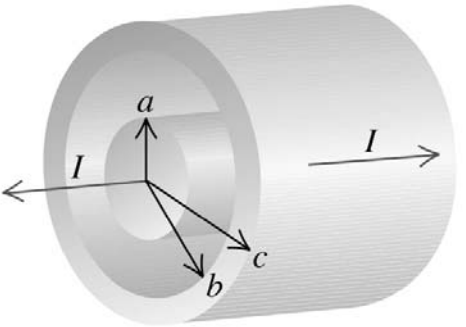
Şekil 28.14

15. Bir elektron, aralarındaki uzaklık D olan ve voltaj V ile yüklenen yüklü iki paralel levha arasında Şekil 28.14'de görüldüğü gibi *ve* hızıyla yol alıyor.
    (a) İki levhanın arasındaki elektrik alanı **E** nedir?
    (b) Elektronun üzerindeki elektrik kuvveti **F** nedir?
    (c) Elektronun sapmaması için nasıl bir manyetik alan **B** uygulanmalıdır? [Unutmayın; vektörlerin büyüklüğü ve yönü vardır.]

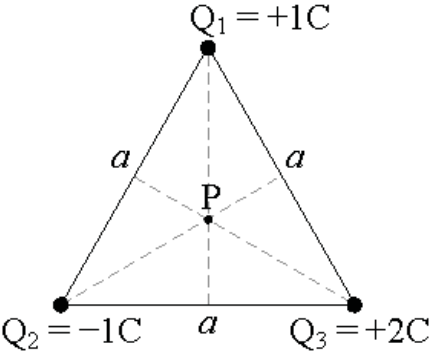
16. Sonsuz uzunlukta bir eş eksenli kablo düşünün, Şekil 28.15'de görüldüğü üzere, bu kablo, yarıçapı a olan katı bir silindirik iletken ile, iç yarıçapı b, dış yarıçapı c olan ince bir dış iletkenden meydana geliyor olsun. Akım $+I$ iç iletkenden geçiyor ve iletkenin her tarafına eşit dağılmış. $-I$ akımı da dış iletken boyunca homojen olarak akıyor. Aşağıdaki durumlar için manyetik alan vektörü $\mathbf{B}(r)$'yi (büyüklüğünü ve yönünü) bulun:
    (a) $r < a$
    (b) $a < r < b$
    (c) $b < r < c$
    (d) $r > c$
    (e) $r = 0$'dan $r > c$'ye kadar r'nin fonksiyonu olarak $B(r)$'yi çizin.

17. Üç tane noktasal yük, kenar uzunluğu a olan eşkenar üçgenin köşelerinde, Şekil 28.16'de gösterildiği gibi duruyor.
    (a) Q_1 yükü üzerindeki elektrik kuvvet $\mathbf{F}_1$'i bulun.
    (b) Q_2 yükü üzerindeki elektrik kuvvet $\mathbf{F}_2$'yi bulun.
    (c) Q_3 yükü üzerindeki elektrik kuvvet $\mathbf{F}_3$'ü bulun.
    (d) Üçgenin merkezindeki (P noktasındaki) elektrik alan $\mathbf{E}_P$'yi bulun.

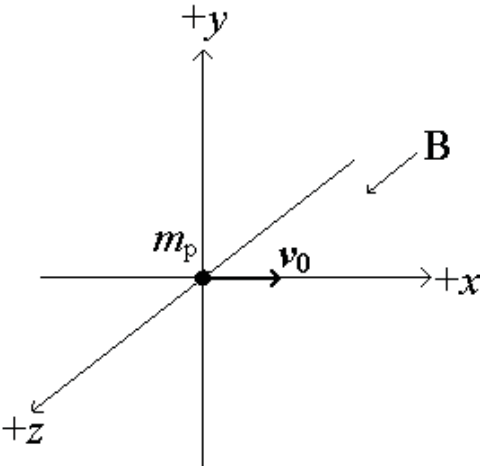
18. Uzaydaki manyetik alan $B = 0{,}001$ Tesla olarak verilmiş, yönelimi $+z$ yönünde. Aniden, ilk hızı $+x$ yönünde $v_0 = 1.000.000$ m/s olan bir proton ortaya çıkıyor (Şekil 28.17). [$e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, $m_p = 1{,}6 \times 10^{-27}$ kg]



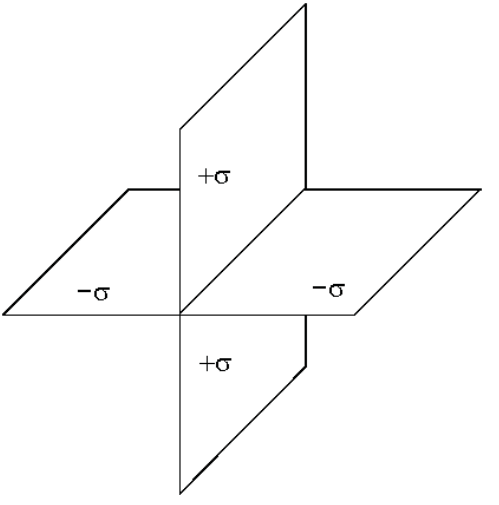
Şekil 28.15



Şekil 28.16



Şekil 28.17



Şekil 28.18

(a) Proton v_0 ile ilk ortaya çıktığında protonun üzerinde **B**'den kaynaklanan kuvveti bulun.

(b) Protonun hareketi ve izleyeceği yol nasıl olur? Hareketi tarif edin, geçerli parametreler bulun ve protonun izleyeceği yolu şekil üzerinde çizerek gösterin.

19. Yük yoğunlukları $+\sigma$ ve $-\sigma$ olan, sonsuz büyüklükte iki tane yüklü tabaka olsun. Şekil 28.18'de görüldüğü gibi bunların yönelimleri birbirine dik. Yüklü tabakaların çevresindeki her yerde elektrik alan desenini çizin.

20. Şekil 28.19'de görülen paralel levhalı kapasitörün alanı $A = 10^{-2}$ m^2, levhalar arasındaki uzaklık $d = 10^{-3}$ m. Levhalar $Q = +9 \times 10^{-4}$ Coulomb ve $Q = -9 \times 10^{-4}$ Coulomb yük taşıyor. $\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12}$ Coulomb^2 m^{-2} N^{-1} olarak alın.

(a) Yük yoğunluğu σ, Coulomb/m^2 birimiyle ne kadardır?

(b) Gauss Kanununu kullanarak, kapasitör levhaları arasında, uçlardan uzaktaki elektrik alanı büyüklüğünün $E = \sigma/\epsilon_0$ olduğunu bulduk. E'yi bulun, birimlerini belirtin ve **E**'nin yönünü şekil üzerinde gösterin.

(c) kapasitör levhaları arasındaki voltaj farkı V ne kadar?

(d) Yüklü sistemlerde voltaj V her zaman kaynak yük Q ile orantılıdır; $Q = CV$. Orantı sabiti C'ye sığa (kapasitans) denir. Sığanın SI birimi Coulomb/ Volt'tur, buna *Farad* da denir. Bu sistemin sığasını Farad cinsinden bulun.

21. Şekil 28.20A'da görülen, aralarındaki uzaklık 2 m olan, birbirine paralel iki tane çok uzun telin her biri 0,5 Amper akımı aynı yönde, sayfadan dışarı doğru ($\odot$ işaretiyle gösteriliyor) taşıyor. $\mu_0 = 4 \times 10^{-7}$ kg m C^{-2}.

(a) P_1 orta noktasında tel 1'den kaynaklanan manyetik alan $\mathbf{B}_1$'in büyüklüğünü bulun. $\mathbf{B}_1$'in yönünü şekil üzerinde gösterin.

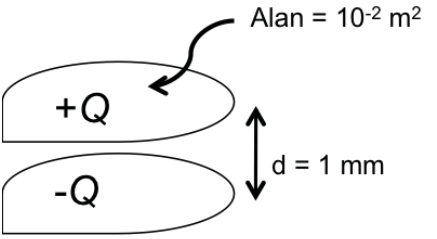
(b) P_1 orta noktasında tel 2'den kaynaklanan manyetik alan $\mathbf{B}_2$'nin büyüklüğünü bulun. $\mathbf{B}_2$'nin yönünü şekil üzerinde gösterin.

(c) P_1'de toplam manyetik alan **B**'nin büyüklüğü kaçtır?

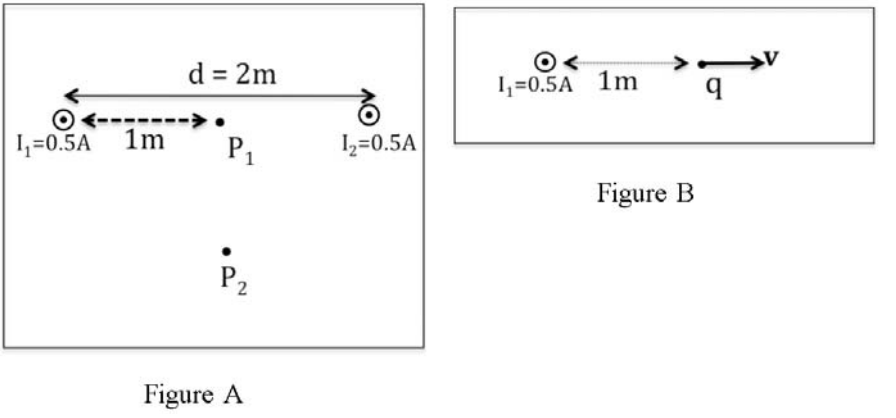
(d) P_2'deki toplam manyetik alan **B**'nin yönünü şekil üzerinde gösterin.

(e) Şimdi tel 2'deki akımın durduğunu farz edin. Şekil 28.20B'de gösterilen yönde $v = 10$ m s^{-1} hızla ilerleyen, 1 C yüke sahip bir top gösteriliyor. Topun üzerindeki kuvvetin büyüklüğü ve yönü nedir?

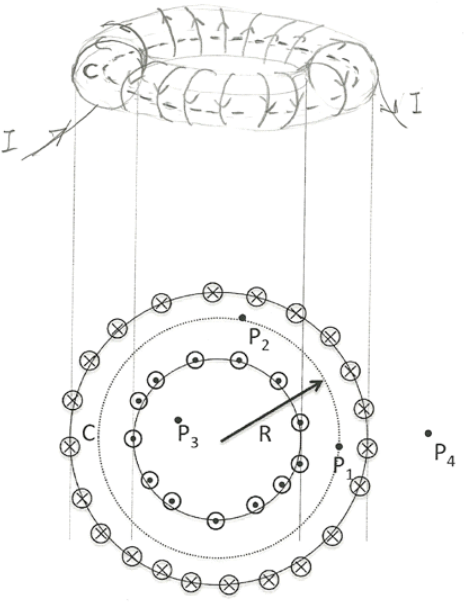
22. Toroid, Şekil 28.21'de üstteki resimde görüldüğü gibi, I akımını taşıyan telin N defa sardığı, simit şeklinde bir sarmal bobindir. Şekil 28.21'de alttaki resimde toroidin kesiti görülüyor, $\odot$ işareti akımın sayfadan dışarı doğru gittiğini, $\otimes$ işareti de akımın sayfadan içeri doğru gittiğini gösteriyor.



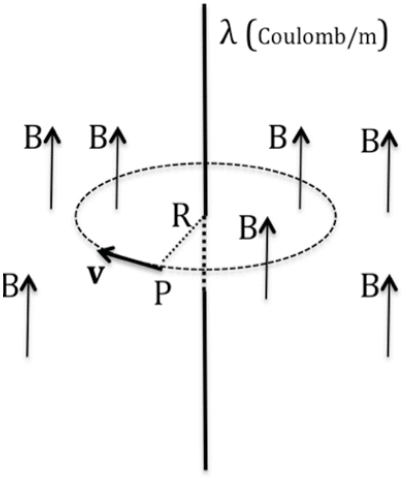
Şekil 28.19



Şekil 28.20



Şekil 28.21



Şekil 28.22

(a) Simetri gereği, manyetik alan büyüklüğü C dairesinin her yerinde aynı olmalı. P_1 ve P_2 noktalarında manyetik alanın yönünü şekil üzerinde gösterin.

(b) Ampère Kanununu kullanarak C dairesi üzerindeki manyetik alanın gücünü N, I ve bu dairenin yarıçapı R cinsinden bulun.

(c) Sarım sayısı $N = 10^4$, $I = 1$ A ve $R = 2$ m ise manyetik alan değerini bulun. $\mu_0 = 4 \times 10^{-7}$ kg m C^{-2}.

(d) P_3 noktasında manyetik alanın gücü ne kadar?

(e) P_4 noktasında manyetik alanın gücü ne kadar?

23. m kütlesine ve $+q$ yüküne sahip, v hızıyla hareket eden bir parçacık başlangıçta P noktasında, birim uzunluk başına $+\lambda$ Coulomb/m yük taşıyan sonsuz bir düz telden R mesafede. Şekil 28.22'de görüldüğü gibi, tele paralel bir de homojen manyetik alan **B** var. Parçacık, teli merkezine alan R yarıçaplı daire üzerinde sabit v süratiyle hareket etmeye başlıyor.

(a) Elektrik alanı çizgilerini şeklin üstüne çizin.

(b) R yarıçaplı dairenin üstündeki herhangi bir P′ noktasında elektrik alanının büyüklüğü nedir? $+q$ yükünün üstündeki elektrik kuvvetin büyüklüğü ve de yönü nedir?

(c) Bu daire üzerindeki herhangi bir P′ noktasında manyetik kuvvetin büyüklüğü nedir?

(d) Bu hareket için Newton'un İkinci Kanununu yazın, düzgün dairesel hareketteki ivme için ma'yı toplam elektrik ve manyetik kuvvete eşitleyin.

(e) R yarıçaplı bu daire üzerinde, verili v hızıyla düzgün dairesel hareket etmek için tel üzerindeki yük yoğunluğu λ kaç olmalı?

24. Bir dalgalı (alternatif) akım $I(t) = I_0 \sin \omega t$ sonsuz bir düz telden geçiyor (Şekil 28.23). Alternatif akım frekansı $f = 50$ Hz.

(a) Bu akımın uzayda meydana getirdiği, zamana bağlı manyetik alanları şekil üzerinde çizerek gösterin.

(b) Zamana bağlı elektrik alanlarını çizin.

(c) Elektromanyetik dalgaların yayılım yönünü çizin.

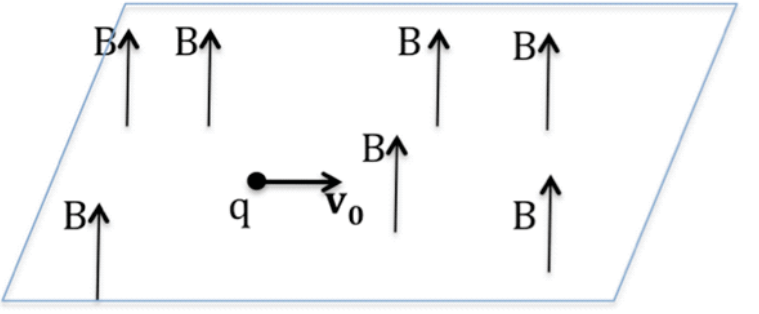
(d) Bu elektromanyetik dalgaların dalga boyu λ nedir? Verilen: $c = 3 \times 10^8$ m/s.

25. q yüküne ve m kütlesine sahip bir parçacık, Şekil 28.24'te görüldüğü gibi homojen bir **B** manyetik alanına, manyetik alana dik yatay düzlemdeki $\mathbf{v}_0$ başlangıç hız vektörü ile atılıyor. Sürtünme yok.

(a) İvme **a**'nın yönü ve büyüklüğü nedir?

(b) Hız ve ivme arasındaki açı nedir?

Şekil 28.23



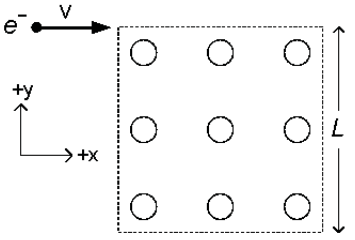
Şekil 28.24

(c) Parçacığın izleyeceği yörüngenin şekli nedir?

(d) Bu hareket için Newton'un İkinci Kanununu yazın ve bunu çözerek parçacığın açısal hızı ω'yı bulun.

(e) Bu hareket esnasında kinetik enerji değişir mi? Yörüngesinin bir periyodu boyunca bu parçacığın üstünde yapılan iş ne kadardır?

26. Her kenarı L uzunluğunda olan kare şeklinde bir yüzeye, dik yönde homojen bir manyetik alan uygulanmakta. Yükü $-e$ ve hızı $+x$ yönünde v olan bir elektron Şekil 28.25 gösterildiği gibi manyetik alanın bulunduğu kareye sol üst köşeden giriyor. Manyetik alana ilk giriş ânında elektron üzerindeki Lorentz kuvveti $(-y)$ yönünde.



Şekil 28.25

(a) Şekil üzerinde manyetik alanın yönünü gösterin. Eğer manyetik alanın sayfadan dışarı doğru olduğunu buluyorsanız dairelerin içine birer nokta; manyetik alanın sayfadan dışarı doğru olduğunu buluyorsanız birer çarpı koyun.

(b) Manyetik alan içinde hareket ederken elektronun uyduğu hareket denklemini yazın.

(c) Elektronun manyetik alan bölgesini karenin sağ alt köşesinden $-y$ yönünde bir hızla terk etmesi için manyetik alanın büyüklüğü ne kadar olmalıdır?

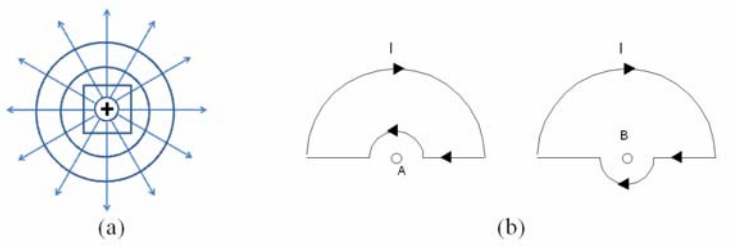
27. (a) Pozitif yüklü bir parçacık Şekil 28.26(a)'da gösterildiği gibi üç ayrı kapalı yüzeyin içinde bulunuyor, bunlardan biri küp, diğerleri de biri büyük biri küçük iki küredir. Hangi yüzeyin içinden geçen elektrik akısı en büyüktür? Kısaca açıklayın.

(b) Şekil 28.26(b)'de ikisi de aynı I akımını taşıyan iki devre gösteriliyor. A ve B noktalarının hangisinde manyetik alan daha büyüktür? Neden?

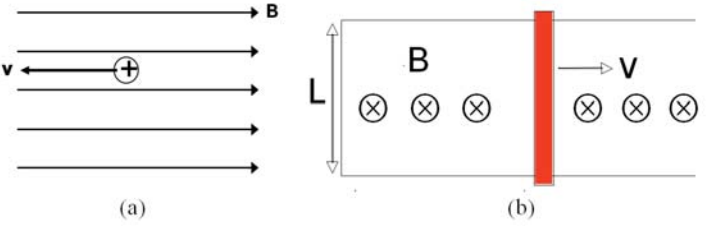
(c) Pozitif yüklü bir parçacık Şekil 28.27(a)'da gösterildiği gibi sabit bir v hı-

zıyla homojen bir manyetik alan **B** içinde yol alıyor. Parçacık üzerindeki manyetik kuvvet hangi yöndedir?

(d) Şekil 28.27(b)'de gösterilen L enli dikdörtgen biçiminde sabit bir iletken rayın bulunduğu düzleme dik yönde B büyüklüğünde homojen bir manyetik alan var. İletken bir çubuk, ray üzerinde sağa doğru v hızıyla gitmekte. Ray ve çubuktan oluşan devrede indüklenmiş bir akım olur mu? Cevabınız evet ise akım hangi yöndedir? Kısaca açıklayın.



Şekil 28.26



Şekil 28.27

28. Şekil 28.28'de görülen toroidin (simit biçimindeki bobin) yarıçapı R ve bu toroidin A kadar küçük bir kesit alanı var. Toroidin etrafına N defa sarılan tel zamanla değişen $I(t) = I_0 \cos\omega t$ kadar bir akım taşımakta.

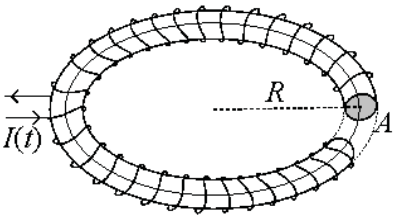
(a) Toroidin içinde gösterilen daire boyunca daireye teğet manyetik alan B'nin büyüklüğünü bulun.

(b) Toroidin içinde her yerde manyetik alan büyüklüğünün aynı olduğunu varsayın. Bu iyi bir yaklaşıklıktır. Toroidin içindeki manyetik akı ne kadardır?

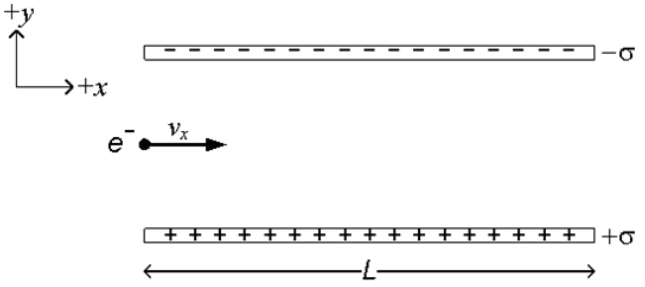
(c) Telin bir sarımındaki indüklenmiş voltaj ne kadardır?

(d) Toroid üzerindeki toplam indüklenmiş voltaj ne kadardır?

(e) Toroidin indüktansı L ne kadardır?



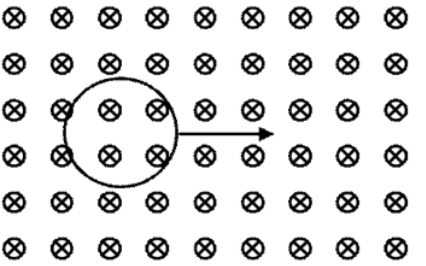
Şekil 28.28



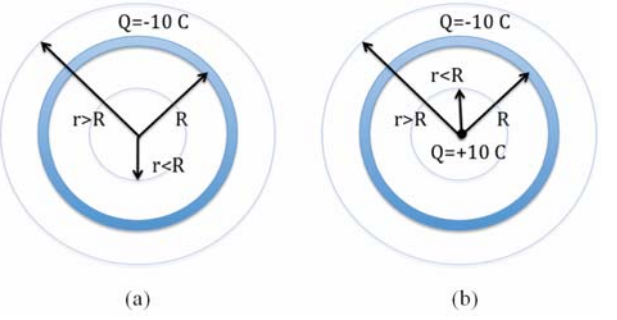
Şekil 28.29

29. Kütlesi m ve yükü $-e$ olan bir elektron $+x$ yönünde v_x ilk hızıyla kare şeklinde iki paralel levhanın arasındaki bölgeye giriyor. Levhaların biri $+\sigma$, diğeri $-\sigma$ kadar homojen alan başına yük yoğunluğu taşıyor (Şekil 28.29). Kare levhaların kenar uzunluğu L iki levha arasındaki açıklığa göre çok büyük olduğundan iyi bir yaklaşımla bu levhaları sonsuz kabul edebilirsiniz. Levhalar ve elektron Dünyanın yüzeyine yakın, g kadar yerçekimi ivmesinin buunduğu bir yerdeler.
    (a) İki paralel levha arasındaki elektrik alanın büyüklüğünü bulun.
    (b) Elektronun levhaların arasında iken serbest cisim diyagramını çizin, elektron üzerindeki kuvvetlerin büyüklüğünü yazın.
    (c) Elektronun elektrik alanı bölgesinden çıkarkenki sürati ne kadar?
    (d) Elektronun elektrik alanı bölgesine girerkenki ve bu bölgeden çıkarkenki kinetik enerjileri ne kadar?

30. Telden yapılmış bir halka Şekil 28.30'da görüldüğü gibi homojen bir manyetik alan içinde hızla hareket ediyor. Bu halkada indüklenmiş bir akım görmeyi bekler misiniz? Cevabınızı kısaca açıklayın.



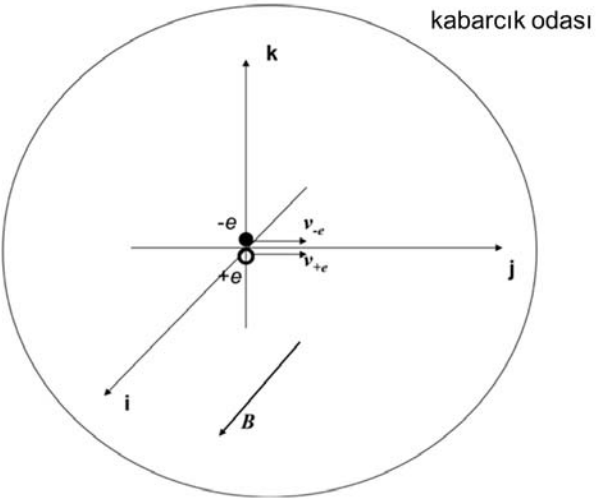
Şekil 28.30



Şekil 28.31

31. Şekil 28.31(a)'da görülen ince iletken küresel kabuk −10 Coulomb yük taşıyor.
    (a) Elektrik alan desenini çizin.
    (b) Elektrik alanının merkezden r uzaklığındaki büyüklüğünü $r < R$ ve $r > R$ için bulun.
    (c) Şimdi Şekil 28.31(b)'deki gibi $Q = +10$ Coulomb kadarlık bir elektrik yükünü kürenin merkezine koyalım. Elektrik alan desenini bu durumda tekrar çizin.
    (d) Bu yeni durumda da elektrik alanının merkezden r uzaklığındaki büyüklüğünü $r < R$ ve $r > R$ için bulun. (E_0'ın sayısal değerini kullanmayın.)

32. Eski hızlandırıcı deneylerinde yüklü parçacıklar birbirilerinden manyetik alanlar kullanılarak ayrıştırılır, izleri de yüklü parçacıların geçtikleri yol üzerinde kabarcıklar oluşturdukları "kabarcık odalarında" gözlenirdi. Çok yüksek enerjili bir foton (≡ *elektromanyetikenerjipaketi*) Şekil 28.32'de görüldüğü gibi $-e$ yüklü bir elektron ile onun antimadde karşılığı olan $+e$ yüklü bir pozitrona dönüşebilir. Elektron ve pozitronun kütleleri aynı, elektrik yükleri ise birbirinin tersidir.



Şekil 28.32

Elektron-pozitron çiftinin $v_{-e} = v_{+e} = 10^6$ **j** m/s hızları ile oluştuğunu varsayalım. Bu bölgede büyüklüğü $B = 6 \times 10^{-5}$ **i** Tesla olan homojen bir manyetik alan var (yönler için Şekil 28.32'ye bakın).

(a) Elektron ve pozitron üzerindeki kuvvetlerin yön ve büyüklüklerini bulun.

(b) Her iki parçacık için, hız ile ivme arasındaki açı ne kadardır?

(c) Elektron ve pozitronun izledikleri yolların şekli nedir? Her iki yolu şekil üzerinde ayrı ayrı çizin.

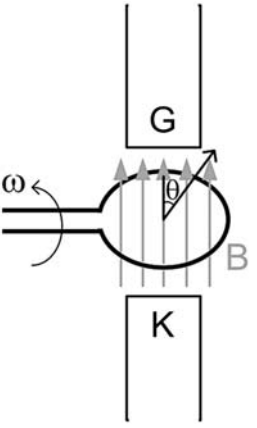
(d) Bu yolların yarıçapı ne kadardır? Elektronun kütlerinin yüküne oranı: $m_e/e = 6 \times 10^{-12}$ kg/C.

33. (a) Şekil 28.33'ü ve Faraday Kanununu kullanarak elektrik jeneratörünün çalışma ilkesini anlatın. Şekilde θ, manyetik alan ile tel halkanın çevirdiği yüzeye dik **dS** vektörü arasındaki açı, ω ise halkanın döndürüldüğü açısal hız.

(b) Eğer ω sabit, tel halkanın çevrelediği yüzeyin alanı A ise indüklenen voltaj (diğer adıyla "elektromotor kuvveti") ne kadardır?

(c) Bu jeneratör direkt akım mı alternatif akım mı verir? Neden?

34. (a) Şekil 28.34(a)'da birtakım yükleri çevreleyen üç kapalı yüzeyin kesitleri verilmiş (yüzey 1: küçük daire, yüzey 2: oval, yüzey 3: büyük daire). Bu yüzeyleri geçirdikleri elektrik akısına göre en yüksek akılıdan en düşük akılıya doğru sıraya koyun. Düşünce şeklinizi kısaca açıklayın.

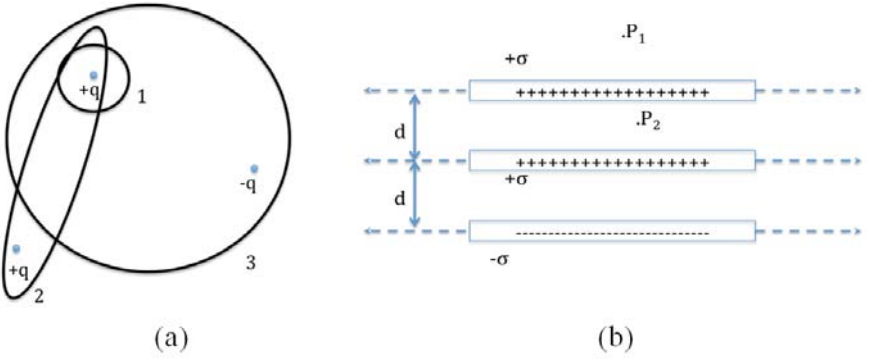


Şekil 28.33

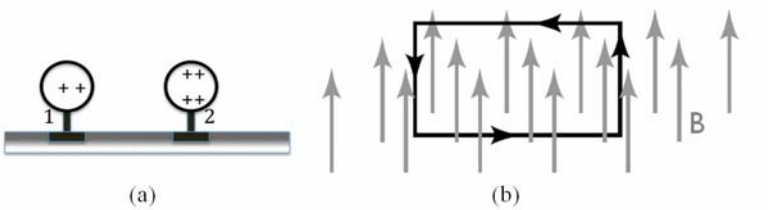
(b) Sonsuz genişlikte üç tane iletken levha Şekil 28.34(b)'te gösterildiği gibi yerleştirilmiş. Levhalar üzerinde homojen yük dağılımları var. P_1 ve P_2 noktalarında elektrik alanının büyüklüğü ve yönü nedir?

(c) Aynı biçimde iki tane küre bir hava masası üzerine sıkıca yerleştirilmişler [Şekil 28.35(a)]. Küreler hava masasından elektrik olarak yalıtılmış durumda olduklarından yüklerini boşaltamıyorlar. Küre 2'nin elektrik yükü küre 1'in yükünün iki katı, kütlesi ise küre 1'in kütlesinin yarısı ($q_1 = 0{,}5\ q_2$, $m_1 = 2m_2$). Her iki kürenin serbest cisim diyagramlarını çizin. Hangisi daha hızlı hareket eder?

(d) Telden yapılmış dikdörtgen biçiminde bir devre dikdörtgen yüzeyi manyetik alana paralel olacak şekilde homojen bir manyetik alanın içine kon-



Şekil 28.34



Şekil 28.35

muş [Şekil 28.35(b)]. Telden şekilde gösterilen yönde bir akım geçerse dikdörtgenin her bir kenarı üzerindeki kuvvetin yönünü bulun; hesaba gerek yok. Tel devre üzerinde net toplam kuvvet var mı? Neden? Toplam tork var mı? Neden?

(e) Bir düzlem elektromanyetik dalgada $B = B_0 \cos(kz - \omega t)\mathbf{j}$'dir. Bu dalganın hareket yönü nedir? Elektrik alan vektörünün yönü nedir? Elektrik alan vektörünü genliğine E_0 adı vererek yazınız.

35. Maxwell Kanunları:

(a) $\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = 0$. Bu eşitliğin ne söylediğini bir cümle ile anlatın. (İpucu: $\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = Q_{in}/\epsilon_0$ şeklindeki Gauss Kanunu ile karşılaştırın.)

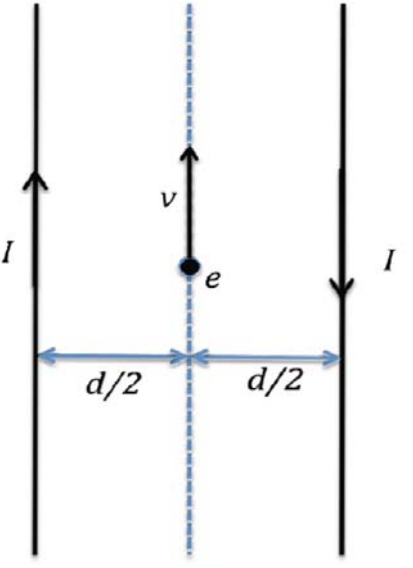
(b) $\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds}$ (Faraday kanunu). Burada "–" işaretinin önemi nedir? Elektrik akımının sıfır olduğu boşlukta genelleştirilmiş Ampère-Maxwell Kanununu da $(\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0\epsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{ds})$ hesaba katarak Faraday Kanunundaki eksi işareti olmasaydı ne olacağını anlatınız.

36. Akım taşıyan iki tane sonsuz uzunlukta düz tel, aralarında d kadar bir uzaklıkla yerleştirilmişler (Şekil 28.36). Bir elektron v hızıyla iki telin ortasındaki P noktasından atılıyor.

(a) P noktasındaki manyetik alanın μ_0, I, d cinsinden büyüklüğünü bulun. Yönü ne tarafa doğru?.

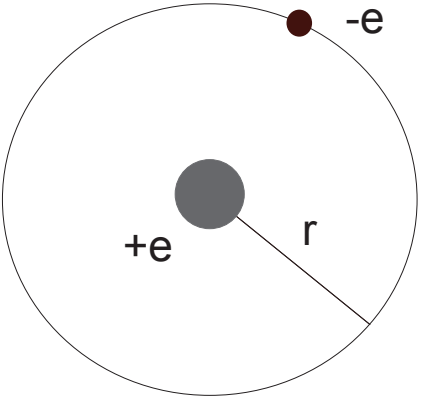
(b) Elektron ilk atıldığı anda üzerinde etki yapan manyetik kuvvetin μ_0, I, d, v ve elektronun yükü $-e$ cinsinden büyüklüğünü ve yönünü bulun.

(c) Şimdi tellerden birinde akım tersine çevrilsin. Elektron aynı noktadan aynı yönde aynı süratle atılsın. Elektronun bu andan itibaren hareketi nasıl olur?



Şekil 28.36

29
Bohr'un Hidrojen Atomu Modeli



Şekil 29.1 Hidrojen atomu için Bohr'un basit modeli

29.1 KLASİK FİZİK: ATOMLAR NEDEN BÖYLE? ATOMLAR NASIL OLUYOR DA VAR OLABİLİYOR?

Buraya kadar klasik fiziği işledik. 19. yüzyıl sonlarında klasik fizik doğa hakkında pek çok şeyi açıklayabiliyor gibi görünüyordu; bu açıklamalar makroskobik nesnelerin hareketlerine dair her şeyi, elektromanyetik alanları ve dalgaları, basınç, sıcaklık, entropi ve denge gibi oluşumlu termodinamik özellikleri kapsıyordu. Fakat yaklaşık olarak aynı zamanlarda deneyde ve teorideki gelişmeler, klasik fiziğin maddenin ve elektromanyetik ışımanın en temel bazı özelliklerini açıklayamadığını gösterdi. Klasik fiziğin en parlak günlerinin hemen arkasından gelen bu başarısızlıklar, Maxwell Denklemlerini maddenin hareket kanunlarıyla uyumlu hale getirmek için Einstein tarafından özel göreliliğin geliştirilmesine, böylece klasik mekaniğin ışık hızına yakın hızlardaki nesneleri doğru ve tutarlı olarak ele alacak şekilde genişletilmesine yol açtı.

Klasik fiziğin maddenin mikroskobik yapısını açıklamakta yetersiz kalması kuantum mekaniğinin gelişmesini sağladı. Dersimizin son kısmında, bu bölümden başlayarak kuantum mekaniğini işleyeceğiz. "*Kuantum*" (Latince *quantum*, "miktar"); ayrık bir birim anlamına geliyor, bir fiziksel niceliğin (çoğu zaman enerjinin) belli miktardaki bir bölümünü veya kısmını anlatıyor. Bu, işleyeceğimiz üzere, elektromanyetik radyasyonun enerjiyi kuantumları halinde taşımasında görülen bir durum.

18. ve 19. yüzyıllarda kimyanın ve fiziğin gelişmesi, maddenin atom diye bir temel yapıtaşı olduğu şeklindeki antik düşünceyi yeniden canlandıracak bilimsel kanıtlar sağladı. Pozitif ve negatif yüklerin olması ve maddenin genellikle elektrik bakımından nötr olduğu gözlemi, atomların da nötr olduğu, eşit miktarda pozitif ve negatif yük taşıdıkları anlamına geliyordu. Negatif yük taşıyan parçacık, *elektron*, 1895'te J. J. Thomson'un yaptığı deneylerle bulundu. Atomlardaki pozitif ve negatif yüklerin dağılımı Rutherford, Geiger ve Marsden'in deneyleriyle incelendi. Bu deneylerle varılan beklenmedik sonuç, pozitif yükün, atom hacminin ancak 10^{-15}'ini kaplayan küçücük bir *çekirdekte* toplandığı, negatif yüklü elektronların ise hacmin geri kalanına dağılarak atomun büyüklüğünü belirlediği idi.

Elektron, çekirdeğe elektrostatik kuvvetle bağlıdır. Bu kuvvetin elektron ile çekirdek arasındaki mesafe r'yle ilişkisi de $1/r^2$ şeklindedir; tıpkı Güneş ile gezegenler arasındaki kütleçekimi kuvveti gibi. Gezegenlerin yörüngeleriyle doğrudan benzerlik kuran klasik fizik, elektronların atom çekirdeğinin çevresinde yörüngede hareket ettiği bir resim çiziyor. Bunun nedeni, atomda açısal momentum olmasının gerekmesi; eğer açısal momentum olmasaydı elektronlar radyal olarak çekirdeğe doğru düşerdi ve Rutherford deneyinin gösterdiğinin aksine, atomun içinde hiç yük ayrılığı olmazdı.

Atomu incelemek için en basit örnek hidrojen atomu; bu atom, çekirdeğini oluşturan tek bir proton ile yörüngede dönen tek bir elektrondan ibaret. Klasik fiziğe göre, dairesel bir yörünge için elektronun yörüngesi şöyle belirleniyor:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, r^2} = \frac{mv^2}{r} \tag{29.1}$$

Bu formül aslında Kepler'in Üçüncü Kanunudur; $F = ma$ denkleminde kütleçekimi yerine yine $1/r^2$ biçimli olan elektrostatik kuvveti koyunca bu çıkıyor.

Kütleçekiminin $1/r^2$ çekim kuvvetiyle birbirine bağlı olan çiftyıldızlar, yörüngeleri için belli bir ölçek tercihi göstermiyorlar. Çiftyıldızlar çok yaygın; gökte gözlenen yıldızların aşağı yukarı yüzde 70'i aslında çiftyıldız. Yörüngenin yarıçapı r için doğada seçilmiş bir *ölçek* yok. Gözlemler, doğada her r yörünge açıklığında çiftyıldız sistemleri olduğunu gösteriyor. Yıldızların birbirine temas ettiği *değen* çiftyıldızlar var. Birbirinden çok uzağa düşen çiftyıldızlar da var, öyle ki çiftyıldız sistemi neredeyse komşu yıldızlara ulaşıyor. Benzer kütlelerdeki yıl-

dızlardan oluşan iki ayrı çiftyıldız sistemi çok farklı boyutlarda olabiliyor. Bizim Güneş Sistemi gibi *gezegen sistemleri* de pek çok farklı boyutta yörüngeler barındırabiliyor. Son 20 yılda bizim Güneş'ten başka pek çok yıldızın da kendine bağlı gezegen sistemleri olduğu bulundu. Bu sistemlerin boyutları da çeşit çeşit.

Tek başına Denklem 29.1, tıpkı çiftyıldız sistemleri gibi, 1 protonla 1 elektrondan oluşan bağlı sistemler olan hidrojen atomlarının da her boyutta olabileceğini söylüyor. Buna göre 1 proton ile 1 elektron yarıçap r ne olursa olsun birbirine bağlanabiliyor olmalı, yeter ki elektron ile protonun birbirine göre hızları o yörünge için Denklem 29.1'de verildiği gibi doğru *Kepler* hızları olsun. Yörüngedeki potansiyel ve kinetik enerjiler yörüngenin yarıçapına bağlı. Dolayısıyla klasik fizik, atomların her enerji değeriyle var olabileceğini de öngörüyor. Klasik fiziğe göre atomların belli bir büyüklük (yarıçap) ölçeği tercihi olmadığı için, tercih edilen bir enerji ölçeği de yok.

Fakat deneyler, atomların bir tipik büyüklük ölçeği olduğunu gösteriyor. Herhangi bir elementin atomlarının büyüklüğü, birkaç ***Angström*** kadar. Atomlar için uygun uzunluk birimi Angström. 1 Angström 10^{-10} m, veya 0,1 nanometre. Büyüklük ölçeğinin yanı sıra, atomların bir de enerji ölçeği var. *Bağlanma* veya *iyonlaşma* enerjileri, pek çok kimyasal tepkimede alıp verilen enerjiler, değişilen birim yük başına birkaç Volt düzeyinde. Kimyasal süreçlerle ilgili tipik voltaj, Volt ile ölçülüyor. Tarihte bu birimin tanımlanmasının nedeni, elektrik enerjisinin ilk kaynağının kontrollü kimyasal tepkimelere dayanan *Volta pili* olması. Hâlâ yaygın olarak kullanılan sıradan piller de bu tür Volta pilleri, voltajları da tipik olarak birkaç Volt kadar. Kimyanın araştırdığı şey aslında, elektronların atomlar arasında alınıp verildiği tepkimeler. Atomların tipik enerji ölçeği, 1 Voltluk voltaj farkıyla hareket eden bir elektronun enerjisi. Bu, atomun pratik enerji birimini, kimyanın ve atom fiziğinin doğal enerji birimi olan *elektron-Volt, eV*'yi veriyor. Elektron'un yükünün değeri $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C'u kullanarak, elektron-Volt'un SI birimi $1eV = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J. Klasik fiziğin, atomların neden bir büyüklük ve bir enerji ölçeği olduğuna dair bir açıklaması yok.

Dahası, klasik fiziğe göre atomların kararlı bile olması beklenmiyor. Yörüngedeki bir elektron, Coulomb kuvvetiyle ivmeleniyor. İvmeli yük demek, zamana bağlı elektrik akımı demek. Bu da zamana bağlı manyetik alanlar ve elektrik alanları meydana getiriyor. Dalgalar ve Maxwell Denklemleri Bölümünde gördüğümüz gibi, elektromanyetik dalgalar oluşup atomdan uzaklara yayılacak. Atom, enerjisini elektromanyetik ışımaya verecek. Klasik fiziğe göre atom kararlı olamayacak. Eğer klasik fiziğin öngörüleri doğru olsaydı atom sürekli değişirdi, enerjisi giderek azalır, elektron(lar) içeri doğru bir spiral yol izleyerek pozitif yüklü çekirdeğe yaklaştıkça yaklaşır ve çok kısacık bir zaman sonunda onunla birleşirdi. *Klasik fiziğe göre, atomlar belli enerjilere ve boyutlara sahip olamamakla kalmayıp, daha da beteri, hangi enerjide ve boyutta oluşurlarsa oluşsunlar o düzende*

duramazlar. Ola ki bir atom oluşacak olsa, o da hemencecik yok olur. Klasik fizik, atomların kararlı varlığını da, gözlemlenen özelliklerini de açıklayamıyor!

29.2 BOHR'UN MODELİ: ATOMUN BOYUTUNU NE BELİRLİYOR?

Kesin bir büyüklük tercihi olması, dalga taşıyan sistemlerin tanıdık özelliklerinden biri. Bunun bilindik bir örneği, müzik aletleri. Bir gitar telinin serbest titreşen kısmının uzunluğu, gitaristin parmağını nereye bastığına göre belirleniyor ve çalınan nota için yarım dalga boyuna, o notayla armoni oluşturan notalar için ise 2, 3, 4. . . yarım dalga boyuna denk geliyor.

Bohr'un hidrojen atomu modeli yeni bir önerme getiriyor. Bu önerme, klasik Denklem 29.1'le birlikte hidrojen atomu için doğru büyüklük ve enerji seviyelerini öngörüyor, hem de deneylerle şaşırtıcı bir uyum göstererek. *Bohr Önermesinin* içeriğinde, elektronun bir dalga gibi davrandığı şeklinde çok radikal bir ifade var. Bohr'un ilk ifadesi *açısal momentumun kuantumlanması* hakkındaydı ama biz burada bu ifadenin bir eşdeğerini kullanacağız: ***r* yarıçapında bir dairesel elektron yörüngesi ancak, yörüngeye bir tamsayı kadar elektron dalga boyu oturuyorsa mümkündür:**

$$2\pi r = n\lambda = \frac{nh}{mv} \quad \text{[\textbf{Bohr Önermesi:} Elektron dalgaları atoma sığmalı!]} \tag{29.2}$$

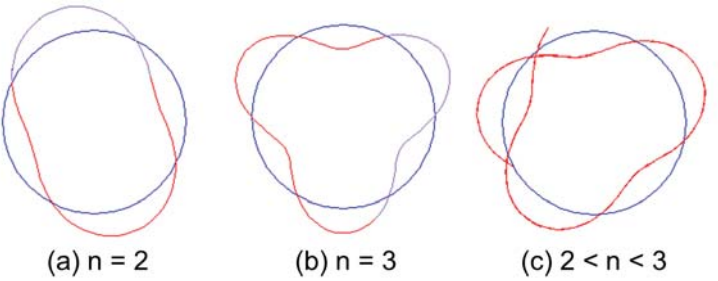
Elektronun dalga boyunu da *de Broglie* bağıntısı veriyor:

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad \text{[de Broglie Dalga Boyu]} \tag{29.3}$$

Burada *n* bir tamsayı, *h* ise doğanın temel sabitlerinden biri, adı Planck sabiti. Bu sabit *Max Planck*'ın *karacisim ışıması* hakkındaki radikal açıklamasında ve Einstein'ın *fotoelektrik etki* için sunduğu yine radikal açıklamada zaten kullanılmıştı.* Bu çok özel bir şart. Yörüngeye tam sayıda dalga boyunun oturması, sadece belli yarıçaplarla mümkün. Şekil 29.2(a) içine tam 2 dalga boyu sığan bir yörüngeyi gösteriyor. 29.2(b)'de tam 3 dalga barındıran bir yörünge var. Şekil 29.2(c)'de ise yörüngeye tam bir dalga boyu sığmadığında ne olduğunu görüyorsunuz. Dalga yörüngenin aynı noktasına "döndüğünde" artıyken eksi değerler alıyor, yörünge etrafında sarıldıkça net toplam sıfır olacak. http://dogayiogrenmek.blogspot.com.tr/ adresinde "Bohr Modeli" konulu etkileşimli bir sanal deney bulabilirsiniz.

---

* Kuantum mekaniğinin kuruluş döneminin ve Planck, Einstein, Bohr, de Broglie ve diğerlerinin katkılarının hikâyesi için, J. Gribbin'in *Bilim Tarihi* kitabına bakabilirsiniz (çev. Barış Gönülşen, Alfa Yayınları, 2017).



Şekil 29.2

Bu özel yörüngelerin yarıçapları Denklem 29.1 ve Denklem 29.2'den çıkıyor. Buna göre Bohr Önermesine uyan yörüngeler için *r*'nin şu değerlerde olması gerek:

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{kme^2} = \frac{(n^2\hbar^2)(4\pi\epsilon_0)}{me^2} \equiv n^2 a_0 \tag{29.4}$$

burada $\hbar \equiv h/2\pi$ ve

$$a_0 \equiv \frac{\hbar^2\ (4\pi\epsilon_0)}{me^2} = 0,5 \times 10^{-10} m = 0,5\ Angstrm \tag{29.5}$$

Bu, ***Bohr yarıçapı***, atomun temel uzunluk ölçeğidir. Atomların bu tipik boyutlarda olması, *elektronun dalga tabiatının bir sonucudur*.

Niels Bohr, Denklem 29.2'yi ilk önce

$$mvr = n\hbar \tag{29.6}$$

şeklinde yazmıştı. Bohr'un önermesi bu şekliyle, açısal momentumun değerlerinin sadece $\hbar$'nin tam sayı katları olabileceğini öngörüyor.

r_n yarıçaplı yörüngeye denk olan hız

$$v_n = \frac{ke^2}{n\ \hbar} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{n\ \hbar} \tag{29.7}$$

r_n ve v_n'nin bu özel değerlerini enerji için olan ifadede yerlerine koyalım:

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{ke^2}{r_n} = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{n^2 a_o} = -(13.6\ eV)\frac{1}{n^2} \tag{29.8}$$

Böylece hidrojen atomunun enerjisi, rasgele bir değer olamaz. Sadece, 13,6 *eV* temel birimlerinde $-1/n^2$ değerlerine sahip olabilir. Bu enerji biriminin, H atomunun mümkün olan en düşük enerjisinin mutlak değerinin adı *Rydberg*: 1 Rydberg ≡ 13,6 *eV*.

Enerjinin "−" işareti taşıması, elektron protona *bağlı* demektir: Buradaki elektronun, protondan çok uzakta ve durur vaziyette olsaydı sahip olacağından daha düşük bir enerjisi vardır. Sonsuzda duran bir elektronun enerjisi sıfır enerji olarak tanımlanır, bağlı elektronun enerjisi sıfırdan daha az olmalıdır.

Son olarak, ışığın renklerini ve atomlardan gelen diğer elektromanyetik ışımaları ele alalım. Elektromanyetik ışımanın görülebilir banttaki frekansı f (veya bu frekansa karşılık gelen dalga boyu $\lambda = c/f$), ışığın, gözlerimizin ayırt ettiği özelliğine, yani *rengine* karşılık gelir. 19. yüzyılda bilim insanları, atomlardan, mesela hidrojen gazındaki atomlardan gelen ışık bir prizmayla veya tayf şebekesiyle renklerine ayrıldığı zaman sadece çok özel bazı frekansların bulunduğunu keşfettiler. Hidrojen atomlarından gelen elektromanyetik dalgaların sadece özel f frekanslarıyla geldiği ve bunun şu kurala uyduğu biliniyordu:

$$f = \text{sabit}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right), \; n \text{ ve } n' \text{ tam sayılar!} \tag{29.9}$$

Klasik fizik ile bu basit ama çok özel formülü anlamanın bir yolu yok. Bunu anlamak için kuantum mekaniğinin bir başka sonucu olan Planck Hipotezi gerekiyor. Bu hipotezle Planck, *karacisim ışımasının* tayfını başarılı bir şekilde açıklamak için tarihte ilk defa dalga-parçacık ikiliğini ortaya atmıştı. Planck Hipotezine göre, *elektromanyetik dalgalar "foton" denen enerji paketleri (kuantumları) halinde yol alırlar. Fotonun enerjisi ε, elektromanyetik dalganın frekansı ile orantılıdır*:

$$\varepsilon = hf = \hbar\omega \qquad [\textbf{Foton Enerjisi}] \tag{29.10}$$

Hidrojen atomu yalnızca belli bazı enerji değerlerine sahip olabilir. Hidrojen atomunun yaydığı bir fotonun enerjisi ε, atomun fotonu yaymadan önceki başlangıç enerjisi eksi atomun son halinin enerjisine eşit olmalı. Denklem 29.8 ile Denklem 29.10 üzerinden, deneylerde gözlenen sonuca (Denklem 29.9) ulaşabiliriz. Denklem 29.9'deki katsayı, Bohr modelinden hesaplanabilir. Bu model, katsayı için gözlemlenen spektrumlardan elde edilen deney sonucuyla aynı değeri veriyor: 13,6 *eV/h* ! Denklem 29.9'deki spektroskobik sabitin değerini deneyde tespit etmek, Planck sabiti h'yi deneylerle saptamanın pek çok yolundan biri. h'nin ilk kez saptandığı karacisim ışıma tayfı, fotoelektrik etki ve gaz halindeki hidrojenin spektroskobisi gibi birbiriyle hiç alakası olmayan deneylerin hepsinden, aynı h değeri çıktı. *Dalga-parçacık ikiliği* görüşleri için büyük bir başarıydı bu. Planck

sabiti böylece doğanın temel bir sabiti olarak tescillendi. h'nin değeri, $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J-s'dir.

Çözümlü Problem: Başka Bir Potansiyel İçin Bohr Modeli

Coulomb potansiyelinden başka potansiyeller için de parçacıkların aynı zamanda dalga olduğu varsayımı, yani Bohr Önermesi ile bir Bohr modeli kurarak o potansiyele özgü sistem boyutlarını ve enerji değerlerini elde edebiliriz. Bir örnek yapalım. r yarıçaplı dairesel yörünge üzerinde m kütleli bir parçacık olsun. Parçacığın potansiyel enerjisi $U(r) = Cr^4$, burada C bir sabit.

(a) Kuvveti bulun ve parçacığın dairesel yörüngesi için hareket denklemini yazın.

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{\mathbf{r}} = -4Cr^3\,\hat{\mathbf{r}},$$ hareket denklemi (**F**= m**a**) da:

$$4Cr^3 = m\frac{v^2}{r}$$

(b) Bohr modeline göre mümkün olan r_n yarıçaplarını bulun.

r_n'yi bulmak için yukarıdaki hareket denklemini, Bohr önermesi (Denklem 29.2) $2\pi r = nh/mv$ ile birlikte kullanmamız lazım. r_n için bu iki denklemi birlikte çözünce şunu buluyoruz:

$$4Cr^3 = \frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r}\left(\frac{n^2h^2}{m^2 4\pi^2 r^2}\right)$$

böylece, $r_n = \left(\frac{n^2\hbar^2}{4Cm}\right)^{1/6}$, burada $\hbar = h/2\pi$

(c) Bohr modeline göre bu parçacık için olası enerji seviyelerini bulun.

E=$\frac{1}{2}$mv2+U(r), ve vn ile rn'yi de yukarıdaki (a) ile (b)'den biliyoruz, o zaman

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 + Cr_n^4$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{n^2h^2}{m^2 4\pi^2 r_n^2}\right) + C\left(\frac{n^2\hbar^2}{4Cm}\right)^{2/3}$$

$$E_n = \frac{3}{4}\left(\frac{4Cn^4\hbar^4}{m^2}\right)^{1/3}$$

PROBLEMLER

1. **Virial Teoremi:** Denklem 29.1 hareket denklemini kullanarak, elektrostatik potansiyel enerjinin, kinetik enerjinin −2 katı olduğunu, Denklem 29.8'de gördüğümüz gibi $U = -2(KE)$ olduğunu gösterin.

2. (a) a ivmesine sahip ivmeli bir q yükünün ışıdığı P gücü şu formülle bulunuyor:

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0}\frac{q^2a^2}{c^3}\ Watt$$

   Burada c ışık hızı. Klasik fiziğe göre, bir hidrojen atomundaki elektronun r yarıçaplı bir yörüngeden spiral yapıp içeri kıvrılarak $r/2$ yarıçaplı bir yörüngeye varmasının ne kadar süreceğini bulun. $r \simeq a_0$ olsun.

   (b) Atomun $r_2 = 4a_0$ yarıçapında ve E_2 enerjisine sahip yörüngeden, $r_1 = a_0$ yarıçaplı, E_1 enerjisindeki yörüngeye klasik fiziğe göre ne kadar zamanda bozunacağını bulun. Serbest bir hidrojen atomunun bozunma süresi için kuantum mekaniğiyle yapılan doğru hesap da benzer bir sonuç veriyor, deneylerle de uyumlu bu.

   (c) Atomun $r_1 = a_0$ yarıçapı ve E_1 enerjisiyle en düşük enerji seviyesindeki yörüngeden, spiral yaparak $r_N = 10^{-14}$ m'de çekirdeğe girmesi için gereken klasik bozunma süresini bulun. Kuantum mekaniğine göre, deneylerin de gösterdiği üzere, böyle bir bozunma *hiçbir zaman gerçekleşmez*. En düşük enerji seviyesi sabittir, çünkü bir elektron-dalganın daha düşük bir enerji seviyesinde, çekirdeğe $r = a_0$'dan daha yakın bir yörüngede var olması mümkün değildir. Dalga, bundan daha küçük bir alana sığmayacaktır. İşte bu, *belirsizlik ilkesi*'dir. Bu konuyu 31. Bölümde daha ayrıntılı olarak işleyeceğiz.

3. Denklem 29.4, 29.7 ve 29.8'deki sonucları, Denklem 29.1 ve 29.2'ten çıkartın.

4. Denklem 29.9'i türetin ve sabiti e, m ve $\hbar$ cinsinden bulun.

5. n'inci Bohr yörüngesindeki elektronun yörünge hızı v_n'yi, $n = 1, 2, 3$ için hesap edin.

6. Hidrojen atomundaki elektron ışık hızına yakın hızlarda hareket etmiyor olsa da, bu elektronun enerji ölçeği E_1'i ve yarıçap ölçeğini, Bohr yarıçapı a_0'ı, ışık hızı c'yi de içeren boyutsuz *ince yapı sabiti* α cinsinden yazmak ilginçtir:

$$\alpha \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137}$$

   (a) Hidrojen atomunun taban enerjisi E_1'i, ince yapı sabiti α ve elektronun

durma hali kütle enerjisi $E_0 \equiv m_e c^2 \cong 511 keV$ ile ifade edin.

(b) Bohr yarıçapı a_0'ı, α ve elektronun "*Compton dalga boyu*" $\lambda_e \equiv \hbar/(m_e c)$ ile ifade edin.

7. (a) Bir hidrojen atomu E_n enerjili n kuantum durumundan, E_{n-1} enerjili $n-1$ kuantum durumuna bozunurken yayılan ışımanın (fotonun) frekansı f ve radyan frekansı ω ne kadardır?

(a) Şimdi n sayısının çok büyük olduğu durumları ele alalım. Bu durumda yayılan ışımanın (fotonun) radyan frekansı, e, r_n, n ve cinsinden nedir?

(a) Klasik olarak, protonun çevresinde r_n yarıçapında dairesel bir yörüngedeki elektron, elektromanyetik radyasyon (ışıma) yayar ve bunun radyan frekansı, yörüngedeki elektronun açısal frekansıyla aynıdır. n'inci Bohr yarıçapı r_n olan klasik bir yörünge için bu ω_n frekansını hesaplayın. Bu frekansın, yukarıda çok büyük n durumunda hesapladığınız fotonun frekansıyla uyumlu olduğunu göreceksiniz. Bu örnek, çok küçük enerji seviyesi farkı veren hallerde kuantum mekaniğinin sonuçlarının klasik sonuçlarla uyumlu olduğunu anlatan *karşılıklılık ilkesinin* geçerli olduğu bir örnek.

30
Dalga-Parçacık İkiliği

19. yüzyılın sonundan itibaren, klasik fiziğin temel deneyleri açıklamakta yetersiz kalması çok radikal hipotezler ortaya atılmasına yol açtı. Bu yeni hipotezler gerçekten de deneyleri hayret verici derecede iyi açıklıyor, hipotezlerin sunduğu öngörüler ardı ardına deneylerle doğrulanıyordu. Çeşitli kuantum hipotezleri, *dalgalar ile parçacıklar arasında klasik fizikte yapılan ayrımı hiçe sayarak* başarılı oldular. Kuantum devriminden önce doğadaki fiziksel varlıklar *ya* parçacık *ya da* dalga sayılıyordu.

Parçacıklar, kütlesi ve belki yükü olan nesnelerdi, Newton'un İkinci Kanunuyla belirlenen yollar üzerinde hareket ederlerdi. "Parçacık" kelimesi mikroskobik nesneleri, atomlar gibi maddenin temel yapı taşlarını ve atomların içindeki elektron, çekirdek, proton ve nötron gibi şeyleri düşündürür. "Parçacık(lar)" kelimesinin anlamı, makroskobik sayıda parçacıktan oluşan, kütlesi olan cisimleri de kapsayacak şekilde genişletilebilir. Böyle makroskobik sistemler de, ister katı cisimler olsunlar ister bulut gibi akışkanlar, yine klasik mekanik kurallarına, hepsi de Newton'un İkinci Kanunundan çıkan katı cisim dinamiğine yahut da akışkanlar dinamiğine uyar.

Klasik fizikte dalgalar, çok sayıda parçacıktan oluşan sistemlerdeki *toplu hareketlerdir*, tıpkı suyun üstündeki *yüzey dalgaları* gibi, havada veya başka bir akışkan ya da katı makroskobik sistem içinde yol alan yoğunluk ve basınç salınımları olan *ses dalgaları* gibi. Bu dalgalar bir bakıma atomlar ve onları oluşturan yapıtaşları gibi temel varlıklar değillerdir, çünkü bol miktarda atomdan oluşan sistemlerde meydana gelirler. Bir bakıma da makroskobik sistemlerin dalgaları (veya *normal kipler* denen salınım biçimleri) bu sistemlerin dinamiklerini oluşturan temel varlıklar olarak kabul edilebilirler çünkü makroskobik sistemleri *sürekli ortamlar* olarak tanımlayan, sistemin içindeki olası bütün makroskobik hareketleri tanımlayan bu dalgalardır.

19. yüzyılda elektromanyetik alanların ve dalgaların anlaşılmasıyla, dalgaların boşlukta da yol alabildiğinin görülmesiyle, içinde hiçbir kütleli cismin bulun-

madığı vakumda da acaba kütlesiz bir madde mi var sorusu ortaya atıldı. *Esîr* ya da *eter* adı takılan bu ortamın, elektromanyetik alanların ve dalgaların var olabildiği sürekli ortam olduğu düşünülüyordu. Herhangi bir dalganın yol alabilmesi için mutlaka bir ortam gerektiği fikri, ses dalgalarıyla ve maddi ortamda var olduğu bilinen başka dalga çeşitleriyle kurulan bir benzerlikten ileri geliyordu yalnızca. Yapılan deneylerde esîrin ölçülebilir hiçbir özelliğine rastlanmaması üzerine araştırmalara son verildi. Elektromanyetik alanlar ve dalgalar, boşlukta, onları destekleyecek hiçbir ortam olmadan vardır. Böylece klasik fizikte elektromanyetik dalgalar temel olarak, mikroskobik olarak dalgadır.

Bilim Rönesansından itibaren, optik biliminin konusu olan ışığın, bazı deneylere dayanarak parçacık olduğu, *girişim* ve *dağılma (difraksiyon, kırılma)* gösterdiğini ortaya koyan başka bazı deneylere dayanarak ise dalga olduğu söylendi. Işığın *hem* dalga, *hem* parçacık olması, klasik fizik için bütün bütün yabancı bir kavramdı, ışığın *aslında* parçacıklardan mı oluştuğu *yoksa* acaba *aslında* bir çeşit dalga mı olduğu üzerine hararetli tartışmalar dönüyordu. 19. yüzyılın sonunda ışığın bir elektromanyetik dalga olduğunun anlaşılmasıyla mesele kapanır gibi oldu. Lakin kısa süre sonra ışık ve diğer elektromanyetik dalgalar için ilk radikal dalga-parçacık ikiliği önerileri ortaya atıldı.

İlk önce, 1900 yılında Planck, elektromanyetik dalgaların enerjiyi parçacıklara benzeyen *kuantumlarda* taşıdığı hipotezini sundu. Çok önemli bir olguyu, gözlenen *kara cisim ışıması spektrumunu*, yani bir T sıcaklığında termodinamik denge halindeki her nesneden yayılan elektromanyetik ışımayı başarılı bir şekilde açıklarken bu hipotezi kullandı Planck. 1905'te Einstein, üzerine ışık (veya başka bir elektromanyetik dalga) vuran bir katının yaydığı elektronların enerjisinin, elektromanyetik dalga frekansıyla birlikte arttığı şeklindeki gözlemi, *fotoelektrik etkiyi* açıklamak için Planck'ın hipotezini kullandı. Dalga-parçacık ikiliği hipotezinin bu ilk iki kullanımı, yine klasik olarak sonunda dalga olduğu düşünülen ışığın, bir parçacık tabiatına *da* sahip olduğunu söylüyordu. Bohr'un hidrojen atomu modeliyle, klasik olarak parçacık olduğu düşünülen elektronların da aynı zamanda birer dalga *da* oldukları önermesi geldi.

30.1 PARÇACIK Ö ZELLİKLERİ

Klasik bir parçacığın enerjisi, momentumu **p**'ye ve konumu **r**'ye bağlıdır, $E = E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$. Her parçacık tipi ve her fiziksel durum için E'nin özgül ifadesi başka başkadır. Göreli olmayan bir parçacık (göreli olmayan, "c'den çok daha düşük hızlarla hareket eden" demek) için bu şöyledir:

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x, y, z) \tag{30.1}$$

Bu ifade, farklı m kütlelerdeki ve farklı $U(x, y, z)$ potansiyel enerjilerdeki parçacıklara göre değişir. Enerji, momentum ve konum arasındaki bu ilişki, eldeki şartlar altında parçacığın fiziğini tanımlar. c ile karşılaştırılabilecek hızlarla hareket eden göreli bir parçacığın enerjisi ise şudur:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + U(x, y, z) \tag{30.2}$$

30.2 DALGA ÖZELLİKLERİ

Farklı dalga denklemleriyle tanımlanan pek çok farklı dalga tipi vardır. Her dalga sisteminde frekans ve dalga boyu arasında belli bir ilişki olur. Önce dalgaların çeşitli özelliklerini hatırlayalım:

- T : *periyot*, dalganın belli bir noktada aynı duruma dönmesi için geçen süre.
- f : *frekans*, dalganın aynı duruma dönme sıklığı. $f = 1/T$. Birim: $s^{-1} \equiv$ Hertz, Hz.
- $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$: *açısal frekans veya radyan frekansı* : Her periyod ya da döngü, 2π radyan faz içerir. Birim: radyan/saniye, rad/s.

  ω, dalga ifadesinde t'nin katsayısı olarak gözükür. Dalga mesela şöyle bir dalga fonksiyonu *psi* (psi) ile tanımlanabilir:

  $$\psi(x, t) = \sin(kx - \omega t)$$

- λ : *dalga boyu*, herhangi bir zamanda, dalganın uzayda kendini tekrar ettiği mesafe aralığı. SI birimi: metre, m.
- $k = 2\pi/\lambda$: *dalga sayısı*, dalganın fazında (radyan) birim mesafe başına meydana gelen değişme. SI birimi: radyan/metre, rad/m.

  k, dalga denkleminde x'in katsayısı olarak görünür, $\psi(x, t) = \sin(kx - \omega t)$ gibi.

Dalga fonksiyonu $\psi(x, t)$, veya daha genel olarak karşımıza çıkan üç boyuttaki hali $\psi(x, y, z, t)$, farklı fiziksel sistemlerde farklı anlamlar kazanır. Suyun yüzeyindeki dalgalar için ψ su yüzeyinde, yüzeyin dümdüz olduğu denge durumuna kıyasla ölçülen pozitif veya negatif fark (yükseklik) demektir. Ses dalgaları için ψ, dalga geçerken ortamın basıncında ya da yoğunluğunda oluşan değişikliktir. Elektromanyetik dalgalar için ψ elektrik alan veya manyetik alandır.

Her dalga sisteminin fiziği, dalganın frekansı ve dalga boyu arasında bir ilişki ile tanımlanır:

$$\omega = v(k)\, k, \tag{30.3}$$

veya, bunun eşdeğeri olarak, yerlerine koyunca gördüğünüz gibi,

$$\lambda/T = \lambda f = v(k) = v(\lambda). \tag{30.4}$$

"Dağılma ilişkisi" denen bu ilişki bütün dalgalarda vardır. Bu ilişki dalganın fiziğini anlatır, tıpkı $E = E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ ilişkisinin bir parçacığın fiziğini anlatması gibi. Dağılma ilişkisi o dalganın kendine özgü dalga denkleminden çıkar, o dalganın temel fiziğinden gelir; bu temel fizik, ses dalgaları için $F = ma$ ve gaz kanunları; elektromanyetik dalgalar içinse Maxwell Denklemleri olabilir. *Faz hızı* denen $v(k)$ niceliği genel olarak dalga sayısı k'ya (buna denk olarak dalga boyu λ'ya) bağlıdır. Bazı durumlarda faz hızı bütün dalga boylarında aynıdır.

Mesela, gerilimin τ ve birim uzunluk başına kütlenin ρ olduğu bir teldeki dalgaların faz hızı $v = \omega / k = \lambda f = \sqrt{\tau/\rho}$'dur. Boşluktaki elektromanyetik dalgalar için, $v = \omega / k = \lambda f = c$. Boşlukta ışık hızı c, dalga boyuna bağlı değildir. Fakat camdaki elektromanyetik dalgalarda, mesela prizmadan geçen ışıkta, hız dalga boyuna (renge!) bağlıdır, yani $\omega = v(k)k$. Bir cam prizmadan geçen beyaz ışık, spektrumundaki farklı renklere kırılıyor çünkü farklı dalga boyları (renkler) camda farklı hızlarla yayılıyor. $v(k)$ fonksiyonu malzemelere göre değişiyor.

Dalga paketi, farklı k dalga sayılarına ve $\omega(k)$ frekanslarına sahip birçok dalganın süperpozisyonudur. Birçok dalga süperpoze olduğunda dalga paketi de hareket eder, zira onu oluşturan farklı k ve $\omega(k)$'lara sahip dalgalar hareket etmektedir. Bir bütün olarak dalga paketinin hızı, onu oluşturan dalgaların herhangi birinin faz hızı $v(k) = \omega / k$ *değildir*. Dalga paketi bunun yerine *grup hızı* ile hareket eder;

$$v_g(k_0) \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0)$$

açısal frekans $\omega(k)$'nın dalga sayısı k'ya göre kısmi türevinin dalga paketini oluşturan dalgaların dalga sayılarının ortalaması k_0'daki değeri bize grup hızını veriyor. (Burada bu bağıntıyı türetmeyeceğiz.)

Dalga paketlerini ve *belirsizlik ilişkisini* gelecek bölümde işleyeceğiz.

30.3 DALGA VE PARÇACIK ÖZELLİKLERİ SÖZLÜĞÜ

Maddenin, atomların, moleküllerin ve makroskobik maddenin ve de radyasyonun (ışımanın) temel özelliklerini anlamak için her şeyin ikili bir doğası olduğunu, parçacıkların aynı zamanda dalga, dalgaların da parçacık olduğunu dikkate almak gerek. Parçacık özellikleri $E = E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ ve dalga özellikleri $\omega = v(k)\, k$ her sistemde kendine özgüdür. *Fakat dalga ve parçacık özellikleri arasındaki çeviri evrenseldir.* Bu sözlükte sadece iki terim var: Bu iki terim elektronlar, protonlar, nötronlar ve diğer bütün temel parçacıklar için, irili ufaklı atomlar ve moleküller için, elektromanyetik ışıma (*fotonlar*), ses (*fononlar*) ve başka şeyler için geçerlidir:

$E = hf = \hbar\omega$	Planck Bağıntısı
$p = h/\lambda = \hbar k$	de Broglie Bağıntısı

Burada E enerji, p momentum, h Planck sabiti, f frekans, ω açısal frekans, λ dalgaboyu ve k dalga sayısı.

Evrensel sabit h, Planck sabiti, doğadaki bütün sistemler için geçerli olan dalgaparçacık sözlüğünün iki maddesinde de mevcut. Bu sabitin ve sık sık kullanılan $\hbar = h/2\pi$ kombinasyonunun değeri, SI birimleriyle şöyle:

$$\begin{aligned} h &= 6,6260755 \times 10^{-34} \text{ J-s} \\ \hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1,05457266 \times 10^{-34} \text{ J-s} \end{aligned}$$

Sözlüğümüzü elektromanyetik ışıma için kullanalım, bunun için $\omega = ck$: $\omega = ck$ denkleminin iki tarafını da $\hbar$ ile çarpınca, sonuç $E = pc$ oluyor. Elektromanyetik ışımanın parçacıkları için enerjiyle momentum arasında böyle bir ilişki olmalı. Serbest parçacıklar için göreli enerji-momentum ilişkisi $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ (Denklem 30.2'den çıkıyor) ile karşılaştırınca görüyoruz ki fotonlar kütlesiz parcacıklar, $m = 0$.

Sözlüğü şimdi de serbest, göreli olmayan bir elektron için kullanalım; potansiyel enerjisi sıfır olacak şekilde, etkileşmelerden uzak, boşlukta gezen serbest bir elektron olsun bu. $E = p^2/2m$, sözlük maddelerini yerlerine koyunca, k dalga sayısına sahip göreli olmayan serbest bir elektronun açısal frekansı $\omega(k)$ için şu sonucu veriyor:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar\omega \tag{30.5}$$

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{30.6}$$

Böylece elektron dalgasının faz hızı da,

$$v(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m} \tag{30.7}$$

Elektronun parçacık doğası ve sınırlı büyüklüğü, bir dalga paketiyle temsil ediliyor. Pek çok elektron dalgasından oluşan dalga paketinin grup hızı

$$v_g(k_0) = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)(k_0) = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{p_0}{m} \tag{30.8}$$

Burada serbest elektron için dağılma ilişkisini, Denklem 30.6'yı kullandık. Elektron dalga paketinin faz hızı da grup hızı da *dalga boyuna (dalga sayısına) bağlı. Parçacık hızı* $v_0 = p_0/m$ *ile uyumlu olan, dalga paketinin grup hızıdır*.

30.4 PARÇACIK DALGASI NE DEMEK?

Kuantum mekaniğinde, bir parçacıkla ilişkili olan dalga fonksiyonu $\psi(x, y, z, t)$, "*parçacığın x, y, z noktası yakınlarında, dxdydz küçük hacminde olma ihtimali,* $|\psi(x, y, z, t)|^2 dxdydz$*'ye eşittir*"anlamına geliyor. Parçacık dalgasının Max Born'dan gelen bu *olasılığa dayalı* yorumu, dalgaların dalga, parçacıkların da parçacık olduğu makroskobik dünyaya dayanan sezgilerimize çok ters.

Haydi kuantum âlemine dönelim ve şu soruyu soralım: Nerede bu elektron? Cevap, elektron şurada burada ve her yerde, çeşitli olasılıklarla orada veya burada olabilir. Bu bir parçacık için çok acayip bir özellik. İlke olarak, parçacığın nerede olduğunu bulacak bir deney yapmak mümkün. Uygulamada da, parçacığın nerede olduğunu Δx, Δy, Δz hassasiyetiyle bulmak için deneyler yapılabilir. Teknolojinin gelişmesiyle, belli bir (x_0, y_0, z_0) konumunun çevresindeki bir $\Delta x \Delta y \Delta z$ hacmi için bir parçacığın, diyelim bir elektronun yerini tespit etmek için deney yapmak sahiden de mümkün. Ne de olsa, elektron ya da başka bir parçacık *bir yandan parçacık bir yandan da dalga*. Bir parçacık olarak, onun yerini bulmak için tasarlanan deneylerde elektron bir yerlerde olmalı ve gerçekten de bir yerde olduğu bulunuyor. Şimdi hidrojen atomundaki elektronu ele alalım. Diyelim ki elektron nerede diye bulmak için deney yapan kimse yok. "Kimse" derken, özellikle insanları kastetmiyoruz: Çoğu zaman, diğer atomların, fotonların veya "bir şeylerin" etkileşimi, elektronu dar alana sıkıştırarak ya da durumunu değiştirerek atomu rahatsız etmiyor demek bu. Yalıtılmış halde hidrojen atomunu düşünün, olası enerji durum- larından birinde, E_n enerjisine sahip ve hiçbir şeyle etkileşmiyor olsun. Elektron nerede? Atomun çevresine yayılmış, bir dalga fonksiyonuyla tanımlanmış. E_n enerjili bu yayılmış dalga durumunda, elektronun protondan *ortalama* uzaklığı, $r_n = n^2 a_0$.

Born'un kuantum mekanik dalgasına dair olasılığa dayalı yorumu, yine hem dalga hem de parçacık, *foton* olan elektromanyetik dalgalarla yapacağımız bir karşılaştırma ile desteklenebilir. 25. Bölümde gördüğümüz gibi, elektromanyetik alanlar birim uzay hacmi başına belirli bir miktar enerji taşıyor, bunu da şu denklem veriyor:

$$u_{EM} = u_B + u_E = \epsilon_0 \, \mathbf{E}^2(x, y, z, t) = \frac{1}{\mu_0} \, \mathbf{B}^2(x, y, z, t) \qquad (30.9)$$

Burada $E(x, y, z, t)$ dalgadaki elektrik alanını, $B(x, y, z, t)$ ise manyetik alanı gösteriyor. Maxwell Denklemleri, bir elektromanyetik dalgadaki elektrik ve manyetik alanların toplam enerjisinin, elektrik alanı ile manyetik alandan herhangi biri üze-

rinden ifade edilebileceğini gösteriyor. Elektromanyetik enerji yoğunluğu alanların ikisi üzerinden de gösterilebilir. Öte yandan Planck Hipotezine göre, *f* frekanslı dalgaların enerji yoğunluğu foton olarak taşınıyor, fotonlar da elektromanyetik ışımaya karşılık gelen parçacıklar. Her bir fotonun enerjisi $\varepsilon = hf$ olduğundan, (*x, y, z*) noktası yakınlarında birim hacim başına *f* frekanslı fotonların sayısı n_f şöyle oluyor:

$$n_f(x,y,z,t) = \frac{1}{hf}\, u_{EM;f}(x,y,z,t) = \frac{1}{hf}\, \epsilon_0\, \mathbf{E}_f^2(x,y,z,t). \tag{30.10}$$

Buradaki *f* harfi, *f* frekanslı dalgaları gösteriyor. (*x, y, z*) noktasının çevresindeki küçük *dx dy dz* hacmi içindeki fotonların sayısı,

$$n_f(x,y,z,t)\; dx\; dy\; dz = \frac{1}{hf}\, \epsilon_0\, \mathbf{E}_f^2(x,y,z,t)\; dx\; dy\; dz \tag{30.11}$$

Eğer bir sistemde *f* frekanslı fotonların toplam sayısı N_f ise, (*x, y, z*) noktası yakınındaki *dx dy dz* hacmi içinde *f* frekanslı fotonlar bulma *olasılığı* şu:

$$P_f(x,y,z,t)\; dx\; dy\; dz \equiv \frac{n_f(x,y,z,t)\; dx\; dy\; dz}{N_f} = \frac{\epsilon_0\, \mathbf{E}_f^2(x,y,z,t)\; dx\; dy\; dz}{hfN_f} \tag{30.12}$$

(*x, y, z*)'de birim hacim başına parçacığın orada bulunma ihtimali $P_f(x, y, z, t)$, elektromanyetik dalga-fotonlar için gerçekten de dalga fonksiyonunun mutlak değerinin karesiyle ($\mathbf{E}^2(x, y, z, t)$) orantılıdır. Dalga-parçacık ikiliğinin her şeyde var olan bir özellik olduğu deneylerle doğrulanmış olduğu için, elektronların ve diğer parçacıkların dalga fonksiyonları da bu anlamı taşımalıdır; (*x, y, z*)*'deki dalga fonksiyonunun mutlak değerinin karesi,* (*x, y, z*) *yakınlarındaki küçük bir hacimde ilgili parçacığı bulmanın olasılık yoğunluğunu, bunun birim hacim başına olasılığını verir.* İşte bu da dalga fonksiyonunun Born yorumu.

30.5 SCHRÖDİNGER DENKLEMİ

Dalga fonksiyonları birtakım dalga genliklerinin, birtakım fiziksel niceliklerin uzayda ve zamanda dağılımını tanımlar. Her sistemin dalga fonksiyonu, sistemi yöneten fizik kurallarını yansıtan bir dalga denklemine uyar. Dalga fonksiyonu dalga denkleminden elde edilir. Bir elektromanyetik dalgada elektrik ve manyetik alanların dalga fonksiyonlarının bir *dalga denkleminden* elde edildiğini 24. Bölümde görmüştük. Dalga denkleminin kendisi de, deneylerden çıkan, elektrik ve manyetik alanlara dair bilgilerin tamamını içeren Maxwell Denklemlerinden elde edilir.

Gerilmiş bir telin titreşim dalgalarını düşünelim. Tel üzerinde yürüyen bu dalgalar için dalga fonksiyonu, dalganın her bir parçasının titreşirken telin düm-

düz olduğu denge konumundan ne kadar açıldığını tanımlar. Dalga fonksiyonu, bir tel parçası ve ona komşu parçalar arasındaki kuvvetlerin etkisiyle hareket eden her bir tel parçası için Newton'un İkinci Kanunu ile türetilir. Havadaki, akışkan veya katı bir cisimdeki ses dalgalarında, dalga fonksiyonu her yerdeki düzenli yoğunluklu ve basınçlı denge durumuna kıyasla her bir bölgedeki yoğunluk ve basınç değişimlerini tanımlar. Dalga denklemi yine, sistemin, hacim öğeleri ve komşuları arasındaki kuvvetlerin etkisiyle hareket eden her bir küçük hacim öğesi için Newton'un İkinci Kanununun uygulanmasından ibarettir.

Benzer şekilde, bir parçacığın şurada ya da burada olma olasılığını veren dalga fonksiyonunu belirlemek için de bir dalga denklemi gerekir. Bohr modeli dalga denklemi hakkında ayrıntılı bir bilgi vermiyor. Dalganın asıl meselesini, yani dalganın atoma sığışması gerektiğini kavrayan Bohr modeli, hidrojen atomunun enerji ve yarıçap değerlerini ve atomun yaydığı ve emdiği fotonların spektrumunu doğru ve mükemmel bir şekilde ortaya koyuyor, bu model klasik bir denklem ile Bohr şartını esrarengiz bir dalgayla bir araya getiriyor. Peki ama elektron nerede? Bir nokta parçacık gibi klasik bir yörünge üzerinde olamaz (zaten klasik yörünge klasik fiziğe göre kararlı bile değil). Bohr yarıçapı bir yörüngenin yarıçapı olamaz. Bu yarıçap, olsa olsa, parçacık dalga fonksiyonunun Born yorumuna göre, elektron dalgasının ortalama bir değeri. Dalga fonksiyonunu hesap etmek ve atomun özelliklerini dalga fonksiyonundan çıkarmak için bir dalga denklemi lazım.

Dalga denklemini türetmek için, gerçek dalga fonksiyonunun, kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının bir süperpozisyonu olan bir dalga paketi olduğu varsayımından başlıyoruz. Bir boyutlu bir problemde dalga fonksiyonunun biçimi şöyle olsun:

$$\psi(x) = A\cos(kx) \tag{30.13}$$

Bir sinüs veya kosinüs fonksiyonunun karakteristik özelliği, fonksiyonun ikinci türevinin, negatif bir sabit kere aynı fonksiyon olmasıdır:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\ \psi(x) \tag{30.14}$$

Dalga-parçacık sözlüğünde, momentum $p = \hbar k$, göreli olmayan bir parçacığın kinetik enerjisi de

$$E_K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Serbest bir parçacıkta, toplam enerji kinetik enerjiye eşit, $E = E_K = \hbar^2 k^2/2m$, Denklem 30.14'e göre, dalga fonksiyonu $\psi(x)$, şu dalga denklemini sağlamalı:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E_K\ \psi(x) \tag{30.15}$$

Bütün bunları üç boyuta genelleştiren basit bir dalga fonksiyonu var:

$$\psi(x, y, z) = A\cos(k_x x \ + \ k_y y \ + \ k_z z) \tag{30.16}$$

Dalga vektörü $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$, büyüklüğü k'nin dalga boyu λ'yla ilişkisi standart şekilde $k = 2\pi / \lambda$ olan, yönü de dalga fonksiyonunun zamana bağlı şeklinde dalganın ilerleme yönünü veren bir vektör:

$$\psi(x, y, z, t) = A\cos(k_x x \ + \ k_y y \ + \ k_z z - \omega \ t)$$

Dalga parçacık sözlüğünde, üç boyuttaki de Broglie Bağıntısı şu şekilde:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{30.17}$$

Buna göre, m kütlesine sahip göreli (rölativistik) olmayan, yani hızı c'den çok küçük olan, serbest bir parçacığı temsil eden üç boyutlu $\psi(x, y, z)$ dalga fonksiyonu, şu dalga denklemini sağlamalı:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \ + \ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \ + \ \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] = E_K \ \psi \tag{30.18}$$

Şimdi, bu doğrusal bir denklem: Bütün terimlerde yalnız ψ ve türevleri var; ψ'ün karesi, kübü vs. kuvvetleri gibi "doğrusal olmayan" bağımlılıklar yok. Demek ki, Denklem 30.18'yi sağlayan kosinüs ve sinüs dalgalarının *her türlü süperpozisyonu*, aynı zamanda bu dalga denkleminin bir çözümü olmalı. *m kütlesine sahip göreli olmayan serbest bir parçacığı tanımlayan bütün dalga paketleri, dalga denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonlarıyla tanımlanır (Denklem 30.18)*. Eğer parçacık serbest olmayıp başka nesnelerle etkileşim içindeyse, korunumlu kuvvetlerin $U(x, y, z)$ potansiyel enerjisiyle tanımlı olduğu yerde, toplam enerji $E = E_K + U(x, y, z)$ korunumlu bir nicelik (burada, bir sabit) olmalı. O halde, etkileşim içindeki göreli olmayan parçacığı tanımlayan bütün $\psi = \psi(x, y, z)$ dalga fonksiyonlarının sağladığı

$$E_K \ \psi + U(x, y, z) \ \psi = E \ \psi \tag{30.19}$$

eşitliğinden şu sonuca varıyoruz:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \ + \ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \ + \ \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + U(x, y, z) \ \psi = E \ \psi \tag{30.20}$$

[Schrödinger Denklemi]

Serbest parçacık için yaptığımız gibi burada da $E_K \ \psi(x, y, z)$'yi dalga fonksiyonu $\psi(x, y, z)$'nin ikinci türevleri cinsinden ifade etmek için de Broglie Bağın-

tısını kullanıyoruz. Bu, *m* kütlesine ve *U*(*x, y, z*) potansiyel enerji fonksiyonuna sahip göreli olmayan bir parçacık için ***Zamandan Bağımsız Schrödinger Dalga Denklemi***.* Bu dalga denklemini belli bir durumun potansiyel enerjisi ve *sı- nır koşulları* ile çözmek gerekir. Hidrojen atomundaki elektron için elektrostatik potansiyel enerji,

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \tag{30.21}$$

Schrödinger Denklemi ise,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = E\,\psi(x,y,z) \tag{30.22}$$

Bu oldukça özel, sıradan olmayan bir *diferansiyel denklem*. Buradan, negatif enerji değerleri için, elektronun protona bağlı olduğu durumlar için, sadece ayrık kuantumlanma değerleri çözüm olarak çıkıyor:

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2n^2a_o} = -(13.6\ eV)\frac{1}{n^2} \tag{30.23}$$

Bunlar, Bohr modelinin doğru olarak verdiği değerlerle aynı. Bu E_n enerji değerlerinin her biri için, Schrödinger Denkleminin çözümü olarak özel bir $\psi_n(x, y, z)$ dalga fonksiyonu elde ediliyor. Burada hidrojen atomu için Schrödinger Denklemini çözmeyeceğiz, bunu nasıl yapacağınızı kuantum mekaniği derslerinde görebilirsiniz. Bu dalga fonksiyonu $\psi_n(x, y, z)$'nin mutlak değerinin karesi, atom E_n enerjili haldeyken elektronu orada veya burada, herhangi bir (*x, y, z*) noktasına yakın küçük bir *dxdydz* hacmi içinde bulma ihtimallerini veriyor:

$$P_n(x,y,z)\ dxdydz = |\psi_n(x,y,z)|^2\ dxdydz \tag{30.24}$$

Bu olasılık dağılımı, atomun özellikleri hakkında insanın hesap edebileceği veya deney yapıp bakabileceği mümkün *bütün* bilgileri kapsıyor. Mesela, atomun E_n enerjili halinde elektronun protondan ortalama uzaklığı r_n, olasılık dağılımı $P_n(x, y, z)$'yi kullanarak *ağırlıklı ortalama* olarak hesaplanıyor. Cevap, Bohr modelinin verdiği değerle tıpatıp aynı, $r_n = n^2a_0$!

---

* Schrödinger Denkleminin *zamana bağlı* şekli de benzer bir yoldan elde edilebilir. Zamana Bağlı Schrödinger Denklemini burada tartışmayacağız çünkü bunun için *karmaşık sayıları* kullanmak şart. Schrödinger Denklemini kullanırken sistemi tanımlayan bir potansiyel enerji var mı veya işin içinde korunumlu olmayan kuvvetler de var mı diye merak etmeye gerek yok: Atomlar söz konusuysa bunların hepsi korunumlu olan elektrostatik kuvvetten çıkar.

Kutudaki Parçacık

Sadece L uzunluğunda, koordinatları $0 < x < L$ olan bir çizgi üzerinde hareket edebilecek bir parçacık düşünün. Kutunun içinde parçacık serbest, $0 < x < L$ için potansiyel enerji $U(x) = 0$, kutunun dışında ise potansiyel enerji çok büyük, "sonsuz," parçacığın kutudan çıkmaya yetecek enerjisi yok. Bu, önemli birtakım fiziksel durumlar için gerçekçi bir yaklaşım. Mesela bu parçacık, neredeyse serbestçe hareket eden, üzerinde yaklaşık olarak sıfır kuvvet olan, yaklaşık olarak sabit potansiyel enerjiye sahip (bunu $U(x) = 0$ olarak alacağız) bir elektron olabilir ve bu elektron L uzunluğunda düz, doğrusal bir polimer zincirinin içinde, moleküllerin uzunluğunu yani $0 < x < L$ bölgesini aşamayacak şekilde polimer zincirine kuvvetle bağlanmış olabilir. Kutudaki parçacık modelinin kullanışlı olduğu bir başka durum da, elektronların, farklı malzemelerin arasına konmuş L kalınlığında bir film içinde kapalı olduğu durum; elektron filmin içinde serbestçe hareket ediyor ama filmi çevreleyen $x < 0$ veya $x > L$ bölgelerindeki farklı malzemelere geçmeye yetecek enerjisi yok.

Çözümlü Problem: Kutudaki Parçacık

Bir parçacığın L büyüklüğünde tek boyutlu bir kutu içinde hareket edebilecek şekilde kapalı kaldığı parçacık problemini ele alalım. Kutunun içinde ($0 < x < L$) parçacık serbest, kutunun dışında ise potansiyel enerji sonsuz. Dalga fonksiyonunun yapısını bulmak için şu adımları izleyin.

(a) m kütleli serbest bir parçacık için, $0 < x < L$ "kutusunda" geçerli olan Schrödinger Denklemi nedir?

Denklem 30.18'i izlersek, tek boyutta serbest bir parçacık için Schrödinger Denklemi şu,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E_k\ \psi(x)$$

Burada Planck sabiti, m parçacığın kütlesi, E_k de parçacığın enerjisi. Serbest bir parçacıkta E_k parçacığın kinetik enerjisi, çünkü potansiyel enerji yok.

(b) Serbest bir parçacık için Schrödinger Denkleminin çözümleri $\psi(x) = A\cos(kx)$ veya $\psi(x) = B\sin(kx)$ biçiminde olur, buradaki A ile B birer sabit.

Parçacığın $x \leq 0$'da olma olasılığı sıfır olması gerektiğine göre, kutunun sınır koşulları için doğru biçim bu dalga fonksiyonlarının hangisi olur?

Dalga fonksiyonu $x = 0$'da ortadan kaybolacağına göre, $\psi(0) = 0$ ve çözüm de $\psi(x) = B \sin(kx)$ biçiminde olmalı.

(c) Parçacığın $x \geq L$'de olma olasılığının da sıfır olması gerektiğine göre, bu sınır koşulunu sağlayacak olası k değerleri neler?

Dalga fonksiyonu $x = L$'da da ortadan kaybolması gerektiğine göre, $\psi(L) = 0$, $\sin(kL) = 0$. Bu yalnızca $kL = n\pi$ ise mümkün, buradaki n bir tam sayı, $n = 1, 2, \ldots$ Yani k'nin olası değerleri

$$k = n\pi/L$$

Bir başka deyişle dalga sayısı yalnızca, kutunun boyutunun belirlediği ayrık değerlere sahip olabilir. Böylece, dalga fonksiyonu $\psi(x) = B\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ şeklinde yazılabilir.

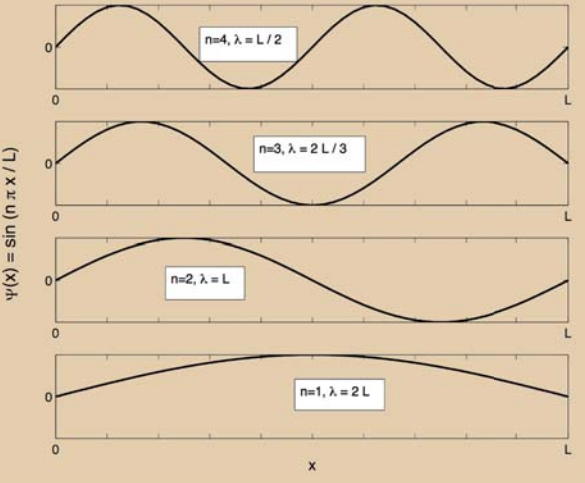
(d) Parçacığın dalga boyunun olası değerleri neler?

Dalga boyu ile dalga sayısı arasındaki ilişki $\lambda = 2\pi/k$ olduğuna göre, parçacığın dalga boyunun olası değerlerini, bir önceki soruda bulduğumuz k değerlerini yerlerine koyarak bulabiliriz:

$$\lambda = 2L/n$$

Dalga boyu da yalnızca, kutunun boyutlarının belirlediği ayrık değerlere sahip olabilir.

Aşağıdaki şekilde, $n = 1, 2, 3,$ ve 4'e karşılık gelen dört ayrı λ değeri için kutunun içindeki dalga boyları $\psi(x)$ görülüyor.



30.6 TEMEL SABİTLER, TEMEL KUVVETLER VE DALGA-PARÇACIK İKİLİĞİ

Newton'un evrensel kütleçekimi sabiti G ve ışık Hızı c ile birlikte, Planck sabiti h de doğanın temel sabitlerinden biridir. Boyutsuz *ince yapı sabiti*,

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\,\hbar\,c} = \frac{1}{137}$$

bir elektrik yükü birimi olarak elektronun elektrik yükü e'nin, temel doğa sabitleri h ve c üzerinden boyutsal olarak kurulabileceğini söylüyor. 4. Bölümde gördüğümüz gibi, temel kütle, uzunluk ve zaman birimleri, yani Planck birimleri de, bu üç sabitle, G, c ve h ile tanımlanabilir. Hem parçacıkların hem alanların ele alınmasında dalga parçacık ikiliğini bütünüyle kullanan bir kuantum elektromanyetizma teorisi olan *kuantum elektrodinamiği*, 1940'larda başarıyla geliştirildi (Feynman, Tomonaga ve Schwinger, Nobel Fizik Ödülü, 1965) ve deneylerle sınandı. Kuantum elektrodinamiğinin ifade edilmesinde boyutsuz ince yapı sabitinin çok önemli bir rolü var. Güçlü ve zayıf nükleer kuvvetler, elektromanyetizmayla birleştirilerek bir dizi "büyük birleşik kuantum teorileri" oluşturuldu (Weinberg, Salam, Glashow, Nobel Fizik Ödülü, 1979).

Doğanın dört temel kuvvetinden biri olan kütleçekimi ise hâlâ kuantumlanmış değil. Oysa Einstein'ın genel görelilik teorisinde klasik bağlamda tamamen anlaşılan kütleçekimi olgusunun da kuantum tarafı olmalı. Kütleçekimi alanının boşlukta ışık hızı c ile yayılan dalga çözümleri var. Kütleçekimi dalgalarının varlığı, nötron yıldızları (pulsarlar) içeren çiftyıldızların davranışları gözlenerek dolaylı olarak doğrulandı, zira bu yıldızların dinamikleri, bunların kütleçekimi dalgaları yaydıklarına işaret ediyor (Hulse ve Taylor, Nobel Fizik Ö dülü, 1993). Son yıllarda, Dünya'ya gelen kütleçekimi dalgaları ileri teknolojili antenler ve interferometre sistemleriyle doğrudan gözlendi. İki karadelik veya iki nötron yıldızının birleşmelerinden kaynaklanan kütleçekimi dalgalarının dünyada kaydedilip çözümlenmesi bilimde yeni bir çığır açtı (Thorne, Weiss ve Barish, Nobel Fizik Ödülü, 2017). Fakat kütleçekimi alanlarıyla bağlantılı dalga parçacık ikiliği henüz anlaşılamadı. Planck kütle, uzunluk ve zaman ölçüleri Büyük Patlamanın ardından evrenin ilk çaglarında önemli bir rol oynamış olmalı. Planck ölçülerinin tam fiziksel anlamı, ancak kuantum kütleçekimine dair geçerli bir teori geliştirilip deneylerle doğrulanınca anlaşılacak. Planck sabiti h'nin önemi de ancak kuantum kütleçekiminin anlaşılmasıyla tam olarak ortaya çıkacak.

PROBLEMLER

1. Serbest bir elektronun (potansiyel enerji $U = 0$) hızı v'yi, dalga boyu λ ve kütlesi m cinsinden ifade edin.

2. Göreli olmayan (ışık hızından çok daha yavaş hızlara sahip) serbest elektronlar: Aşağıda verilen hızlarla hareket eden bir elektronun momentumu ve dalga boyu nedir?

   (a) $v = 1$ m/s.

   (b) $v = 103$ m/s.

   (c) $v = 106$ m/s.

3. Serbest bir göreli olmayan elektronun dalga paketinde, $0{,}5\pi$ Angström'den π Angström'e kadar olan bantta dalga boyları var.

   (a) Bu dalga paketindeki k dalga boyları aralığı Δk ne kadar?

   (b) Bu dalga paketinin ortalama dalga sayısı $k_0 = 3 \times 10^{10}$ m^{-1}. Bu dalga sayısındaki dalganın faz hızı ne kadar?

   (c) Dalga paketinin grup hızı ne kadar?

   (d) Bu dalga paketinin temsil ettiği elektronun momentumu ne kadar?

4. Göreli (ışık hızına yakın hızlarda hareket eden) serbest elektronlar: Aşağıda verilen E toplam enerjileriyle hareket eden bir elektronun momentumu ve dalga boyu ne?

   (a) $E = 1$ MeV.

   (b) $E = 10^3$ MeV.

   (c) $E = 10^6$ MeV.

   Elektron dalga boylarını şu atom ve çekirdek boyutlarıyla karşılaştırın, 1 Angström ve 10 Fermi (1 Fermi = 10^{-15} m, 1 Angström = 10^{-10} m).

5. Aşağıdaki durumlarda sizin dalga boyunuz ne olur?

   (a) 2 m/s hızla yürürken,

   (b) 10 m/s hızla koşarken,

   (c) Dururken (Gelecek bölümde, sizin duruyor *olamayacağınızı* göreceğiz).

6. Göreli olmayan serbest elektronun toplam enerjisi,

   (a) Elektronun momentumu p ve kütlesi m cinsinden ne kadar?

   (b) Dalga sayısı k cinsinden ne kadar?

   (c) Frekansı cinsinden ne kadar?

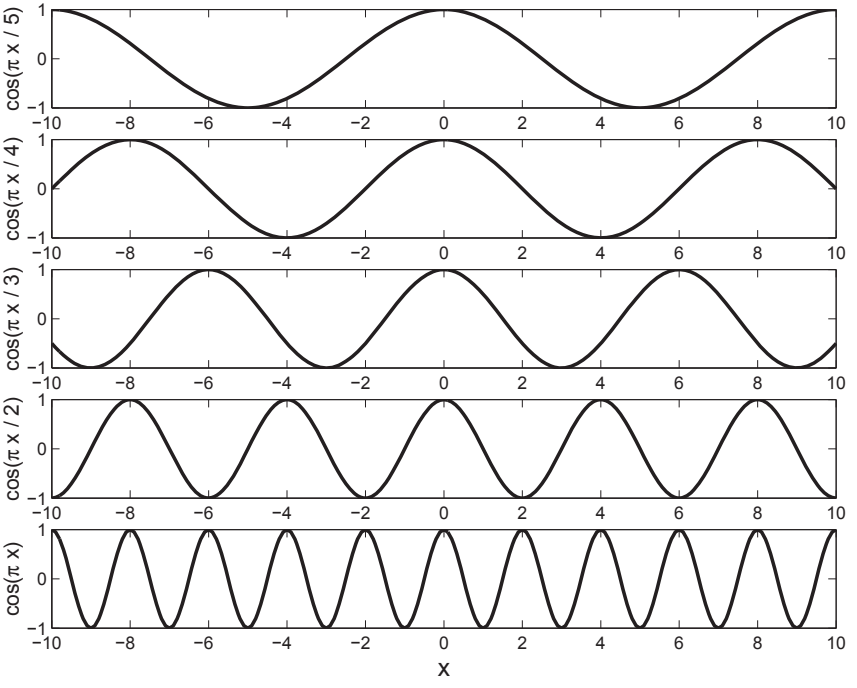
7. Göreli serbest elektronun toplam enerjisi,
   (a) Elektronun momentumu p ve kütlesi m cinsinden ne kadar?
   (b) Dalga sayısı k cinsinden ne kadar?
   (c) Frekansı cinsinden ne kadar?

8. **Kutudaki Parçacık:** Yukarıda çözümlü bir problemde sert ve sonsuz duvarlı, L boyutlu bir kutuya kapalı olan serbest bir parçacığın dalga fonksiyonunun yapısını bulduk. Parçacık kutunun içinde serbestçe hareket ediyor ($U(x) = 0$), kutunun dışında ise potansiyel enerji "sonsuz" ve parçacığın kutudan dışarı çıkmaya yetecek kadar enerjisi yok.
   (a) Parçacığın momentumunun alabileceği değerler neler?
   (b) Parçacığın enerjisinin alabileceği değerler neler? (Enerji sadece kinetik enerji, çünkü parçacık kutunun içinde serbest.)
   (c) Kutudaki parçacığın sahip olabileceği minimum enerji ne kadar? Parçacık, $E = 0$ ile durur vaziyette olabilir mi?
   (a) 100 Angström boyundaki doğrusal bir molekülde serbest hareket eden bir atomun minimum enerjisini bulun. Bu minimum enerji durumunda elektronun dalga boyu ve momentumu ne?
   (a) 50 kg kütlesindeki bir koşucu 400 m'lik bir pistte. Yarıştan önce dinlenmek istiyor, fakat kuantum mekaniğine göre durması mümkün değil. Bu koşucunun sahip olabileceği minimum enerji ne kadar? Bu minimum enerji halinde koşucunun dalga uzunluğu ve momentumu ne kadar?

31
Dalga Paketleri ve Belirsizlik İlişkisi

31.1 DALGA PAKETLERİ

Çok sayıda kosinüs (veya sinüs) eğrisi toplanınca ne olur? Kosinüsleri ele alalım, *cos*(*kx*) şeklinde olsunlar. Şekil 31.1'de çeşitli kosinüs dalgaları görüyorsunuz.



Şekil 31.1

Kosinüs dalgalarının her biri cos(kx) şeklinde, burada $k = 2\pi/\lambda$ dalga sayısı, λ da *dalga boyudur*. $x = \lambda$ olunca, $kx = 2\pi$ oluyor, böylece cos(kx), $x = 0$ noktasında sahip olduğu değere, 1'e geri dönüyor.

cos(kx) dalgasının $x + \lambda$'daki değeri, x'teki değeriyle aynı: $\cos[k(x + \lambda)] = \cos(kx + 2\pi) = cos(kx)$. Farklı k ve λ değerlerine (farklı dalga boylarına) sahip dalgaların maksimum ($x = 0$'daki maksimumdan başka) ve minimum noktaları farklı x noktalarında oluyor. Bunların hepsi $x = 0$'da toplansa da, $x = 0$'dan uzaklaştıkça, birbirinden farklı kosinüs dalgalarının *fazları farklılaşıyor*. Demek ki bir x noktasında bazı k değerleri için kosinüs fonksiyonları pozitifken, bazı k değerlerine sahip kosinüsler de aynı x noktasında negatif değerler alıyorlar.

Kosinüslerin toplamı, $x = 0$'da bir araya gelen bir *dalga paketi* yapıyor. Eğer farklı dalgaların birbirinin *armoniklerini* oluşturacağı şekilde (4. Problem), çok özel bir ilişkiyi sağlayan farklı k değerleri seçilmiş değilse, paketin zirvesi $x = 0$'dan uzaklaştıkça çeşitli k değerlerine sahip pek çok kosinüsün toplamı sıfır olacak.

Dalga paketinin büyüklüğü Δx. *Küçük ve keskin bir dalga paketi (küçük Δx) elde etmek için, farklı k'lere sahip pek çok kosinüs olması lazım*. Δx'in küçük olması için k'lerin yelpazesinin, Δk'nin, büyük olması gerek. Sezgilerimizle de anlayabileceğimiz gibi, bunu şöyle gösteriyoruz,

$$\Delta k \Delta x \geq 1 \tag{31.1}$$

Bütün dalga paketlerinin temel bir özelliği bu. Bu ilişkinin tam biçimi Δx'in tanımına bağlı: Δx, toplam dalga fonksiyonunun değerinin maksimum değerin 1/2'si olduğu yerde x'in değeri olarak mı tanımlanmış, yoksa dalga fonksiyonunun karesi maksimumun yarısına mı eşitmiş, bu ölçüler $x = \Delta x$'te mi, yoksa $x = \Delta x/2$'de mi uygulanıyormuş, vesaire vesaire. Bunun gibi, *bant genişliği* Δk'yi tanımlamanın da farklı yolları var. Burada önemli olan, dalga paketinin genişliği Δx nasıl tanımlanırsa tanımlansın, bant genişliği Δk arttıkça, bununla ters orantılı olarak, genişlik Δx'in azalması. Δx ile Δk genellikle, dalga paketindeki *enerji yoğunluğunun x*'e veya k'ye göre dağılımının *standart sapmaları* olarak tanımlanıyor. Enerji yoğunluğu, dalga fonksiyonunun mutlak değerinin karesi ile orantılı. Burada bu teknik tanımın ayrıntılarına girmeyeceğiz, zaten bu ayrıntılar bu ders için önemli değil. Bu standart tanımlarla, dalga paketinin genişliği ile bant genişliğinin arasındaki ilişki şu şekli alıyor:

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2} \tag{31.2}$$

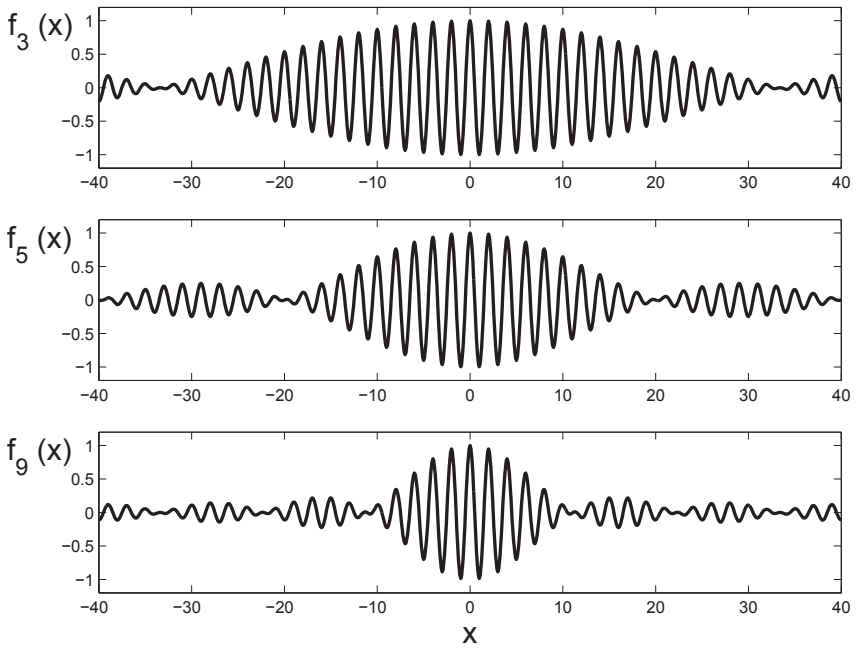
Şimdi $\Delta k \Delta x \geq 1/2$ olduğunu ve Δk arttıkça Δx'in azaldığını göstermek için bazı örnekler üzerinde duralım. Her biri, $\lambda = 2$ m'ye yakın dalga boylarındaki birkaç dalgadan oluşan şu dalga paketlerine bakalım:

$$
\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{1}{3}[\cos(\pi x) + \cos(1.02\pi x) + \cos(1.04\pi x)] \\
f_5(x) &= \frac{1}{5}\sum_{n=-2}^{2} \cos[(1+0.02n)\pi x] \\
f_9(x) &= \frac{1}{9}\sum_{n=-4}^{4} \cos[(1+0.02n)\pi x] \qquad (31.3)
\end{aligned}
$$

Şekil 31.2, $f_3(x)$, $f_5(x)$ ve $f_9(x)$ dalga paketlerini gösteriyor. $f_3(x)$, $\pi \leq k \leq 1{,}04\pi$ aralığında bulunan üç kosinüs dalgasından oluşuyor; $f_5(x)$, $0{,}96\pi \leq k \leq 1{,}04\pi$ aralığındaki beş dalgadan oluşuyor ve $f_9(x)$ de $0{,}92\pi \leq k \leq 1{,}08\pi$ aralığındaki dokuz dalgadan oluşuyor. Şekil 31.2'de görüldüğü gibi, bant genişliği Δk arttıkça, dalga paketinin genişliği Δx azalıyor.

31.2 BELİRSİZLİK İLİŞKİSİ

Kuantum mekaniğinin meşhur *Heisenberg belirsizlik ilkesi* aslında bir dalga özelliğidir. $\Delta k \Delta x \geq 1/2$ biçimiyle bu, klasik dalgalar için gayet iyi bilinen bir ilişki



Şekil 31.2

(bağıntı). Bu ilişki basit bir şekilde diyor ki, bir dalga paketi ne kadar darsa (Δx ne kadar küçükse), basit sinüs ve kosinüs dalgalarının karışımı da o kadar büyük (farklı dalga boylarının ve dalga sayılarının çeşitliliği, bant genişliği Δk de o kadar büyük) olmalı. Kuantum mekaniğinde, *dalga-parçacık ikiliği bu ifadeyi, parçacık özellikleri, momentum ve konuma dair bir ifadeye çeviriyor*. De Broglie bağıntısı $p = \hbar k$ olduğunu söylediğine göre, dalga bağıntısı, Denklem 31.2 şu hali alıyor:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{31.4}$$

Bu, ***Belirsizlik İlişkisi****dir*. Bu çok tuhaf bir şey ve buna denk olan dalga bağıntısının, Denklem 31.2'in aksine, momentumdan bahsederken insan sezgilerine tamamen ters. Fakat yapılan bütün deneylere göre doğru! Bu ilişkiyi kuantum mekaniğinde bu kadar acayip kılan şey, elektronlar üzerinde ve elektronların momentum p gibi parçacık özelliklerine uygulanması. Elektronlar hem dalga hem de parçacık. Bu acayip ikilik, $\Delta p \Delta x \geq /2$ olduğunu söylüyor.

Belirsizlik ilkesi doğru olmalı: Bu böyle oluyor çünkü elektronlar (ve diğer klasik "parçacıklar") aynı zamanda birer dalga. Dalga özelliği, Bohr modeliyle gördüğümüz üzere, atomların neden belli bir boyu olduğunu, neden sadece belli enerji değerlerinde olabildiklerini ve hatta kararlı olabilmelerinin nasıl mümkün olduğunu açıklamak için mutlaka lazım.

Elektron, genel olarak saf bir sinüs veya kosinüs dalgası olmayan bir dalga durumunda. Elektronun durumunu (veya göreli olmayan başka bir kuantum mekaniği sistemini) tanımlayan dalga fonksiyonu, özel bir dalga denkleminden, *Schrödinger Denkleminden* çıkıyor; tıpkı ses dalgalarının, su dalgalarının, vakumdaki, camdaki veya plazmadaki elektromanyetik dalgaların kendilerine özgü dalga denklemlerinin çözümü olması gibi. Bohr modeli, dalga-parçacık ikiliğinin ana fikrini taşıyor. Model, bütün ayrıntıları tutarlı bir şekilde açıklamadan ve elektron nerede, atom elektromanyetik alanlarla (*fotonlarla*) enerji alışverişini nasıl yapıyor gibi soruları cevaplamadan doğru sonuçlar veriyor. Aslında Bohr modeli yarı klasik bir resim kullanıyor, zira bir parçacık koşuluna ($F = ma$) ve bir dalga koşuluna (Bohr Önermesi) dayanıyor. Bu resim eksik ve tutarsız. Atom, ancak Schrödinger Dalga Denkleminin çözümleri olan dalga fonksiyonlarıyla tam olarak tanımlanabiliyor.

Nedir bu dalgalar? Dalga fonksiyonunun karesi bize parçacığın şurada veya burada olmasının olasılığını söylüyor. Elektron bir dalga paketi, bir bulut olarak uzayda dağılmış durumda. Bohr yörüngelerinden birinde bir nokta parçacık gibi hareket etmiyor. Onun yerine, üç boyutlu uzayın her bir yerinde olma *olasılığıyla*, biraz orada biraz burada.

Bohr yörüngesi a_0 sadece, H atomu $n = 1$ enerji durumundaysa elektronun protondan ağırlıklı ortalama mesafesi demek. Bunun gibi, atomun n'inci durumunda, elektron protondan $r_n = n^2 a_0$ *ortalama* mesafesinde. Elektron, zamanın hiçbir ânında *belli bir yerde değil!* Elektronun momentumu ne? Bütün karmaşık dalga paketleri gibi elektron dalgası da birçok dalga boyunun süperpozisyonu; *elektronun aynı anda birçok momentumu var*. Konumunda olduğu gibi, elektronun şu veya bu momentum değeri için de belli bir olasılık var! Herhangi bir durumdaki elektronun belli bir Δp momentum değerleri yelpazesi var, aynı anda hepsi birden geçerli!

Gündelik hayat tecrübemizle bakınca bir dalga paketinin uzayın bir Δx bölgesine yayılması bize tuhaf gelmiyor. Karışık bir dalganın, bir dalga paketinin, farklı farklı pek çok dalga boyundaki (farklı "renklerdeki") birçok basit dalgadan oluşmasını da anlayabiliyoruz, bunda da bir tuhaflık yok. Fakat dalga parçacık olup, elektronun atomun Δx büyüklüğünde bir alanına yayılması ve bu elektronun Δp yelpazesi içinde aynı anda birçok momentumu olması, atomun böyle bir kuantum tasviri sahiden çok acayip: Hiç de doğru dürüst bir parçacık gibi davranmıyor!

31.3 SIFIR NOKTASI HAREKETİ: HİÇBİR ŞEY SABİT OLAMAZ

Belirsizlik ilişkisinden çıkan çok önemli bir sonuç da, kararlı dengedeki sistemlerin durur vaziyette kalamayacağı, minimum enerji durumunun içinde muhakkak bir miktar kinetik enerji olması gerektiği. Kararlı denge konfigürasyonuna yakın olan bir sistem düşünelim. Mesela çekirdeğin içinde hareket eden bir nötron veya bir moleküldeki kimyasal bağ olabilir bu. Belli durumları örnek olarak ele alalım:

Örnek 1: Cl_2 klor molekülü. Diyelim, iki Cl atomu arasındaki bağın denge uzunluğu b olsun. İki Cl atomu arasındaki toplam karmaşık kuvvetin potansiyel enerjisi aşağı yukarı $U(x) = Kx^2/2$; buradaki x, atomlar arası bağ uzunluğu X ile denge değeri b arasındaki fark: $x = X - b$. Eğer sistem $X = b$'de, $x = 0$'da dengede ise, klasik fiziğe göre bu sistem minimum enerji durumu $U = 0$'da olur, atomlar birbirine göre hareket etmiyorlarsa kinetik enerji de sıfırdır.

Fakat belirsizlik ilkesi diyor ki, burada bir miktar momentum, bir miktar kinetik enerji muhakkak olmalı, kinetik enerji sıfır olamaz!

Potansiyel enerjinin küçük olması için x küçük olmalı. Ama o zaman dalga paketi dar olmalı, x değerlerinin yayılımı Δx de küçük olmalı, $\Delta x \sim x$ ki x küçük değerlerde kalsın. Bu birçok momentumun karışımını gerektiriyor. Var olan pek çok momentumdan birisi $p = 0$ olsa dahi,

tek momentum değeri $p = 0$ olamaz, çünkü bir bant genişliği, momentum değerlerinin bir $\Delta p \cong \hbar/\Delta x \cong \hbar/x$ yelpazesi olması şart (burada sadece yaklaşık bir hesap yaptığımız için, belirsizlik ilişkisindeki 1/2 çarpanını kullanmıyoruz). Kinetik enerji, $E_K \cong (\Delta p)^2/2m \cong \hbar^2/(2mx^2)$ düzeyinde olmalı; x küçüldükçe, potansiyel enerji azalıyor ama kinetik enerji artıyor! *Belirsizlik ilkesine göre, bir şey uzayın daha küçük bir bölgesine sıkıştıkça daha hızlı hareket etmesi gerek!*

O zaman toplam enerji hangi x değerinde minimum olur? Momentuma bağlılığı kaldırmak için belirsizlik ilkesini kullanırsak, toplam enerji x'in bir fonksiyonu olarak şöyle ifade edilebilir:

$$E(x) \cong \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{1}{2}Kx^2 \tag{31.5}$$

Enerji $E(x)$'in en küçük, minimum değerine indiği x_0 noktasına yaklaşırken enerji azalacak bu noktayı geçip uzaklaşırken de artacak. Tam bu noktada ne artacak ne de azalacak, $dE/dx = 0$ olacak: Kalkülüsün bu kuralı ile $dE/dx = 0$ denklemini çözerek enerjinin en küçük değere sahip olduğu x_0 noktasını bulabiliriz. $E(x)$'in türevi dE/dx'i hesaplayıp 0'a eşitleyince,

$$\frac{-\hbar^2}{mx^3} + Kx = 0$$

böylece,

$$x_0 = \left[\frac{\hbar^2}{Km}\right]^{1/4}$$

molekülün toplam enerjisinin minimum olacağı x değeridir. Minimum enerji durumunda, iki Cl atomu arasındaki uzaklık, denge uzaklığı b değil. Bunun yerine, uzaklık değerleri, b değerinin çevresinde $\Delta x \cong x = [\hbar^2/(K\ m)]^{1/4}$ yelpazesine yayılmış durumda! Buna karşılık gelen minimum enerji, bu x_0 değerini yerine koyunca şöyle çıkıyor:

$$E_{\min} = E(x_0) = \hbar\omega$$

Burada $\omega = (k/m)^{1/2}$, potansiyelin minimumu yakınlarında sistemin sahip olduğu osilasyon frekansı. (Gerçek değer $E_{\min} = \omega/2$. Belirsizlik ilkesinin yukardaki basit yaklaşımla kullanımı genellikle $E_{\min}$'u gerçek değerine epey yakın bir hassasiyetle veriyor.)

Cl_2 *molekülünün (ve kararlı dengeye yakın olan her sistemin) minimum enerji değerinin, potansiyel enerjisinin minimumundan daha faz-*

la olduğunu görüyoruz. Hiçbir şey potansiyel enerji eğrisinin dibinde "kalamaz." Her şeyin bir miktar kinetik enerjisi muhakkak vardır!

Belirsizlik ilkesi elektronların neden çekirdeğin içine göçmediklerini de buna benzer şekilde açıklıyor. Oysa klasik fizik kurallarını uygulayınca elektronlar kendilerini çekirdeğin içinde buluyorlar ve bizim bildiğimiz atom gibi bir atom, bizi var eden atomlar hiç ortaya çıkmıyorlar!

Klasik fizik ne öngörüyordu hatırlayalım: Elektromanyetizma kuralları uyarınca, bir elektron çekirdeğin çevresinde bir yörüngede hareket ederken, yarattığı elektrik ve manyetik alanlar sürekli olarak değişir. Yükün konumu ve akımın yeri ve yönü, elektron yörüngesinde hareket ettikçe değişmektedir. Yük ve akım, elektrik ve manyetik alanların kaynağı olduğu için iki alan da zamanla değişmelidir. Maxwell Denklemleri alanlardaki değişikliklerin birbirine bağlı olduğunu ve uzaydaki alanların da değişmesiyle sonuçlanacağını söyler, öyle ki elektromanyetik dalgalar her yönde atomdan uzağa doğru ilerleyecektir. Elektromanyetik dalgalar enerjiyi uzağa taşıyor olmalıdır, zira dalgalar uzak noktalarda başka yüklerle karşılaştıkları zaman bu yükler ivmelenir: Demek ki dalganın elektrik alanı uzaktaki yükler üzerinde iş yapacaktır. Dalga alanlarının iş yapma kapasitesi vardır. O halde enerjiyi taşıyor olmaları gerekir. Bu enerjinin elektromanyetik dalganın kaynağından, atomun içindeki elektronun hareketinden geliyor olması gerekir. Kısacası, atom elektromanyetik dalgalar yayarak enerji kaybediyor olsa gerektir.

Elektron enerji kaybederken ona ne olur? Daha önce gördüğümüz gibi, elektrik kuvvet (ve kütleçekimi) gibi $1/r^2$ kuvvetlerinde, parçacığın kinetik enerjisi potansiyel enerji ile ilişkilidir. Potansiyel enerji,

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Dairesel bir yörüngenin hareket denkleminden, $E_K = -U/2$ olduğu görülür. Öyleyse toplam enerji de:

$$E(r) = E_K + U = \frac{U}{2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2r}$$

olur. r azaldıkça toplam enerji de azalır: Daha küçük r'ler için daha büyük negatif sayılar olur. Elektron bir yörüngeden, birazcık daha küçük olan başka bir yörüngeye geçecektir. Klasik fiziğe göre her türlü enerjide her türlü yarıçap ve bütün yörüngeler mümkündür, böylece enerji sürekli olarak azalacak ve elektron çekirdeğe doğru spiral şeklinde bir yol izleyecektir. Çok kısa sürede ortada atom kalmaz!

Elektronların dalga tasviri bununla temelden farklıdır. Elektron dalgasının atoma uyması için, atom sadece belirli durumlarda, elektron dalgasının ayrık E_n enerji değerleriyle, kesin şekil ve biçimleriyle var olabilir. Atom yine elektromanyetik ışıma yayacak. Maxwell Denklemleri kuantum âleminde de geçerli. Fakat

elektromanyetik ışıma yayma işleminde atomun olası durumlarından birinden, diyelim n'den, başka bir duruma, diyelim n' durumuna geçmesi gerek. Atom, sınırlı enerji değerleri $\varepsilon = E_n - E_n'$ paketleri taşıyan elektromanyetik dalgalar yayabilir. Planck hipotezine göre $\varepsilon = hf$'dir, böylece atomun yaydığı radyasyon (ışıma) sadece belirli frekanslarda olabilir;

$$f = (E_n - E_{n'})/h. \tag{31.6}$$

Enerji paketine veya enerji *kuantumuna* $\varepsilon = hf$, *foton* denir. Elektronlar ve diğer klasik parçacıklar aynı zamanda dalga iken, klasik olarak dalga olan elektromanyetik radyasyon alanları da aynı zamanda bu enerji kuantumlarını taşıyan parçacıklardır. Başka kaynaklardan gelen elektromanyetik ışıma da atomu etkiler: Elektron yüklü olduğu için elektromanyetik alanlara tepki verir. Fakat bu etki ancak elektronun dalga durumunu değiştirerek gerçekleşebilir: Atom, bir n durumundan bir n' durumuna, $\varepsilon = E_n - E_{n'}$ enerjisine ve $f = (En - E_{n'})/h$ frekansına sahip bir fotonu emerek geçebilir.

H atomunun en düşük enerjisi $E_1 = -13{,}6\ eV$. Böyle bir *en düşük* enerji neden var? H atomunun neden bundan çok daha düşük bir enerji durumu, atomun yarıçapının (elektron dalgasının ortalama boyutunun) çok daha küçük olduğu, elektron dalga paketinin protona çok daha yakın olduğu bir durum neden yok? Nihayetinde böyle bir durumda proton ile elektron arasındaki çekimden kaynaklanan elektrostatik potansiyel enerji çok daha düşük olurdu. Elektron hakikaten de çekirdeğe girseydi bile, elektrostatik çekimin potansiyel enerjisi elbette çok daha düşük olurdu: Elektron ile proton arasındaki uzaklık r çok küçük olduğunda, diyelim çekirdeğin yarıçapına yakın bir şey olduğunda, potansiyel enerji

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

daha büyük bir negatif sayı olur.

Tamam, kuantum mekaniğinde elektronun bir dalga olduğunu ve atomun herhangi bir boyda ve enerjide olamayacağını çünkü dalgaya uyması gerektiğini anlıyoruz. Fakat mesele şu, elektron dalgasının en düşük enerji durumu neden elektronu protondan hâlâ bu kadar uzakta tutuyor? Sonuçta Bohr yarıçapı $a_0 = 0{,}5$ Angström $= 5 \times 10^{-11}$ m, çekirdeğin yarıcapından 100.000 kat daha büyük!

Küçük bir egzersiz yapalım, H atomunun sahip olabileceği minimum enerjiyi bulmak için belirsizlik ilişkisini kullanalım:

> Örnek 2: Bir dalganın bir atoma uyması için, belirli büyüklükte bir yer lazım. Örnek 1'de gördüğümüz gibi, elektron dalga paketi küçüldükçe dalga durumunda daha fazla dalga boyu bulunmalı. Bu yüzden de dalga durumu bir tek $p = 0$'a sahip olamaz, bir momentum değerleri

$\Delta p \cong \hbar / r$ bandı olmalı. Kinetik enerji $E_K = \Delta p^2/2m \cong \hbar^2/(2mr^2)$ düzeyinde olmalı. r küçüldükçe potansiyel enerji azalıyor ama kinetik enerji artıyor. *Belirsizlik ilkesine göre eğer bir şey uzayın daha küçük bir yerine sıkışırsa daha hızlı hareket etmesi gerekiyor!* Peki o zaman r'nin hangi değerinde H atomunun toplam enerjisi minimum olur?

$$E \cong \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Minimum enerji için $dE/dr = 0$ olmalı, öyle ki

$$-\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 0$$

olsun. Bunu r için çözünce

$$r = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} = a_0$$

çıkıyor, buradan da

$$E_{\min} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2a_0} = -13.6\ eV$$

sonucuna varıyoruz. r azaldıkça kinetik enerjinin artması ve potansiyel enerjinin azalması arasındaki değiş tokuş, H atomunun minimum boyutunun ve enerjisinin bu değerlerde olmasına neden oluyor, böylece elektron dalgası çekirdeğe daha fazla yaklaşmıyor. Belirsizlik ilişkisinin kullanılması genelde kesin değere yakın sonuçlar veriyor. Bu örnekte bulduğumuz sonuç, Bohr modelinden ve elektron dalgası için Schrödinger Denkleminden elde edilen kesin değerle aynı çıkıyor.

PROBLEMLER

1. (a) Gündelik hayatta tipik uzaklık ve momentum değerleri nasıl? Gündelik hayattaki uzaklık ve momentum ölçümlerindeki tipik belirsizlikler neler?

   (b) Gündelik hayatımızda belirsizlik ilişkisi $\Delta p \Delta x > \hbar/2$'yi neden hissetmiyoruz?

2. Bir molekülün içindeki elektronun potansiyel enerjisi $U(x) = Cx^3$, burada C bir sabit, $C = 8$ Rydberg Angström^{-3}. Bu elektronun minimum enerjisini bulun.

3. **Kuantum Mekaniğinde Havada Durma (Levitasyon)**: *m* kütlesine sahip bir parçacık, Dünya'nın kütleçekimi potansiyelinde *vakumda*. Kütleçekimi potansiyeli, $z = 0$'da düz ve katı bir yüzeyden z mesafe yukarıda, yaklaşık $U(z) = mgz$ olarak veriliyor, z Dünya'nın yarıçapından çok daha kısa. Burada $g \cong 10$ m s^{-2}, Dünya'nın yüzeyine yakın yerdeki kütleçekimi ivmesi.

   (a) Parçacığın Dünya'nın yüzeyinden mesafesi z'yi ve parçacığın minimum enerjisini m, g ve $\hbar$ cinsinden bulun.

   (b) Dünya'nın yüzeyinde, vakumda havada dengede durma yüksekliğini bir elektron için, bir proton için ve kendiniz için hesaplayın.

   (c) Gerçek koşullarda ne oluyor? Cevap: Mutlak vakum dışındaki bütün durumlarda, başka parçacıkların elektromanyetik alanları ve bunun sonucunda potansiyel enerjiye olan katkılar, Dünya'dan kaynaklanan kütleçekimi potansiyel enerjisinden çok çok daha büyük. Dünya'nın kütleçekimi potansiyel enerjisi bütünüyle göz ardı edilebilir. Fakat bütün gercekçi durumlarda, atomik potansiyellerde bütün parçacıklar bir anlamda *"havaya kalkıyor" ve hareket ediyor*, çünkü belirsizlik ilkesine göre potansiyelin dip noktasında "sabit kalamazlar."

4. **Armonikler:** Birbirinden farklı λ_1 ve λ_2 dalga boylarına sahip iki kosinüs dalgasının ikisinin de maksimum noktaları $x = L$'de. λ_1 ve λ_2 arasındaki ilişki ne? Birbirleriyle armonik olan dalga boylarından ibaret bir dalga paketi, L, 2L, 3L...'de kendini tekrar edecektir. Tek bir bölgede toplanan, bir tek zirvesi olan bir dalga paketi, sadece armonik dalga boylarından oluşmuş olamaz.

5. *Sadece iki* kosinüs (ya da sinüs) dalgası, yalnızca sınırlı bir hacimde toparlanmış bir dalga paketi oluşturmaz. *Vurular* üretirler:

   (a) İki kosinüs dalgasının süperpozisyonunu düşünün:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[\cos(k_1 x) + \cos(k_2 x)]$$

   Şu trigonometrik eşitlikleri kullanarak,

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned}$$

   aşağıdaki eşitliği kanıtlayın:

$$f_1(x) = \cos[(\frac{k_1 - k_2}{2})x] \times \cos[(\frac{k_1 + k_2}{2})x]$$

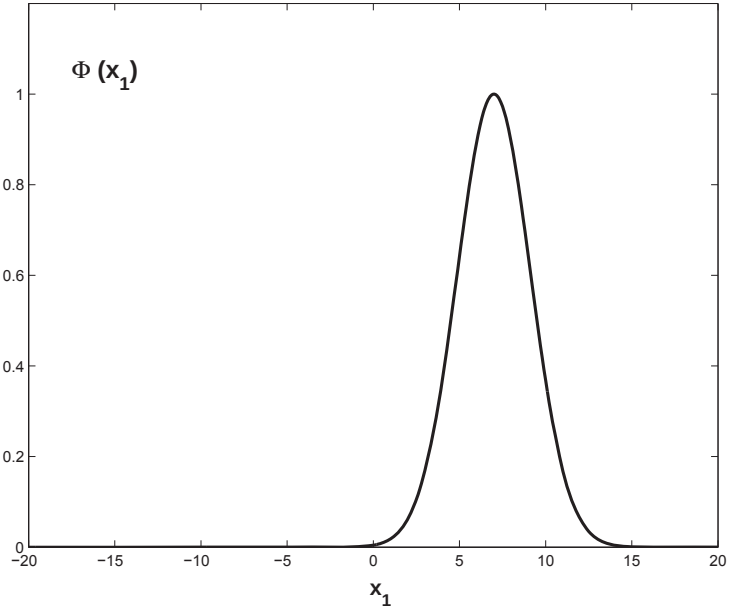
   (b) Bu formülü kullanarak, $-200 \leq x \leq 200$ için aşağıdaki bağıntının grafiğini çizin:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[\cos(\pi x) + \cos(1,02\pi x)]$$

Zamanın bir fonksiyonu olan osilasyonlar için, ω_1 ve ω_2 gibi birbirine çok yakın iki frekanstaki ses dalgalarının süperpozisyonu, $1/2(\omega_1 + \omega_2)$ ortalama frekansına sahip bir notadır, $1/2(\omega_1 - \omega_2)$ gibi çok düşük bir frekansla ton değiştirir. Ses dalgasının, hava basıncındaki salınımların (osilasyonların) *karesi* ile orantılı olan enerji yoğunluğu, *vuru frekansını* $(\omega_1 - \omega_2)$ taşır, bir müzik aletindeki bir çift telin akordu biraz bozulduğu zaman işte bunu *vuru* olarak duyarsınız.

32
Pauli Dışlama İlkesi

Şekil 32.1'deki gibi, kuantum mekanik bir sistemde, bir $\Phi(x_1)$ dalga durumunda bir tek elektron olsun. Bu elektronun küçük bir dx_1 çevresindeki bir x_1 konumunda

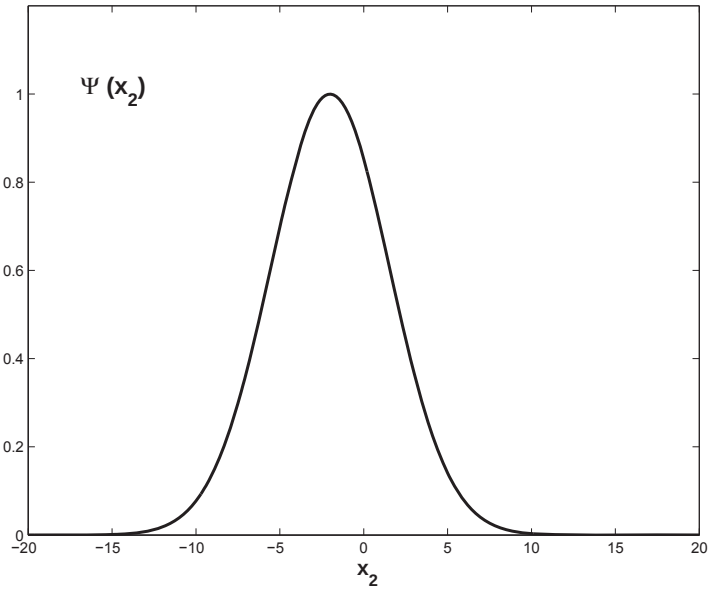


Şekil 32.1

bulunma olasılığı şu:

$$P(x_1)dx_1 = |\Phi(x_1)|^2 dx_1$$

Şekil 32.2'deki gibi, farklı bir $\Psi(x_2)$ dalga durumunda olan tek bir elektron varsa,



Şekil 32.2

bunun küçük bir dx_2 çevresindeki bir x_2 konumunda bulunma olasılığı da şu:

$$P(x_2)dx_2 = |\Psi(x_2)|^2 dx_2$$

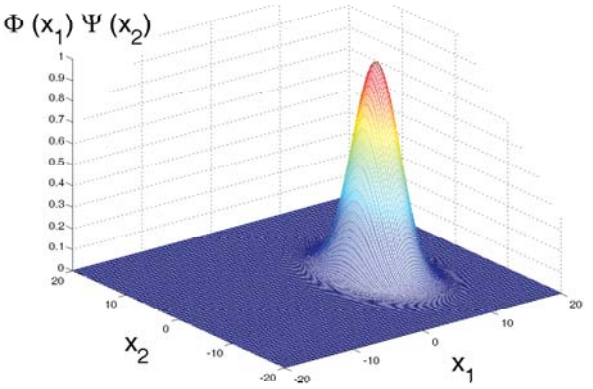
Eğer iki elektron varsa, biri $\Phi(x_1)$ dalga durumunda, diğeri de $\Psi(x_2)$ dalga durumundaysa, iki elektronun dalga durumu, Şekil 32.3'te görüldüğü gibi şöyle bir şey oluyor;

$$\Phi(x_1)\Psi(x_2),$$

öyle ki elektronlardan birinin x_1'de ötekinin x_2'de bulunma olasılığı, Şekil 32.4'te görüldüğü gibi, $|\Phi(x_1)\Psi(x_2)|^2 = |\Phi(x_1)|^2|\Psi(x_2)|^2$.

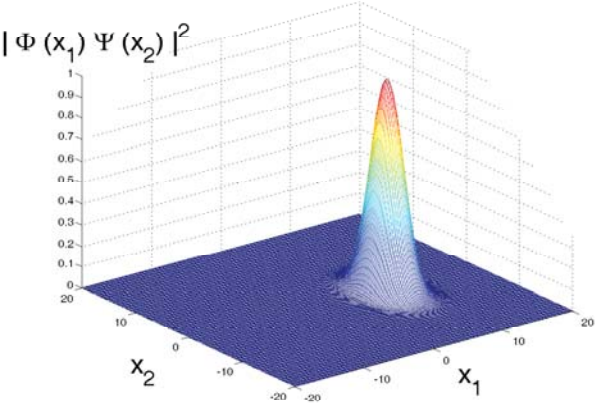
İki ayrı şeyin birbirinden bağımsız olarak gerçekleşme olasılığı, bunların teker teker olma olasılığının çarpımıdır. Tıpkı *zarlar* gibi: İki zar attığınız zaman bunlardan birinin 4 gelme olasılığı 1/6'dır, diğerinin 3 gelme olasılığı da yine 1/6'dır. İlk zarın 4, ikincisinin 3 gelme olasılığı,

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$



Şekil 32.3

Fakat tek bildiğimiz, bir elektron Φ dalga durumunda, bir başkası da Ψ dalga durumunda. O zaman neden $\Phi(x_2)\Psi(x_1)$ diye bir dalga fonksiyonu (Şekil 32.5) kullanmıyoruz? Dalga fonksiyonu böyle olursa, olasılık $|\Phi(x_2)\Psi(x_1)|^2 = |\Phi(x_2)|^2|\Psi(x_1)|^2$ şeklinde olur (Şekil 32.6). İki elektronu birbirinden ayırt edeme-



Şekil 32.4

yiz. İkisi birbirinin aynı. Klasik fizikte bunları ayırt edebiliriz, birine x_1'deki deriz, ötekine de x_2'deki. Fakat bunlar dalga durumunda oldukları zaman x_1'deki, x_2'deki diye adlandıramıyoruz, çünkü *dalgaların kesin konumları yok.* x_1 ve x_2 değişkenleri, elektronları adlandırıp birbirinden ayırt edebileceğimiz kendilerine özgü konumlar değil. $\Phi(x_1)\Psi(x_2)$ de, $\Phi(x_2)\Psi(x_1)$ de, iki elektron için doğru dalga

fonksiyonları olamazlar. Dalga fonksiyonunun doğrusu belki şudur,

$$f_+(x_1, x_2) = \Phi(x_1)\Psi(x_2) + \Psi(x_1)\Phi(x_2)$$

Şekil 32.7'de görüldüğü gibi: Bu durumda olma olasılığı $|f_+(x_1, x_2)|^2$, Şekil 32.8'de görülüyor. YA DA, Bir matematiksel yol daha var:

$$f_-(x_1, x_2) = \Phi(x_1)\Psi(x_2) - \Psi(x_1)\Phi(x_2)$$

Bu da Şekil 32.9'da görülüyor. Aradaki işaret pekala '–' olabilir, zira Şekil 32.10'da görüldüğü gibi, $|f_-(x_1, x_2)|^2$ *olasılığı hesap edildiğinde,* x_1 *ile* x_2 *ifadenin içinde eşdeğer konumlarda, birinin yerine diğerini koysanız formül aynı kalıyor.*

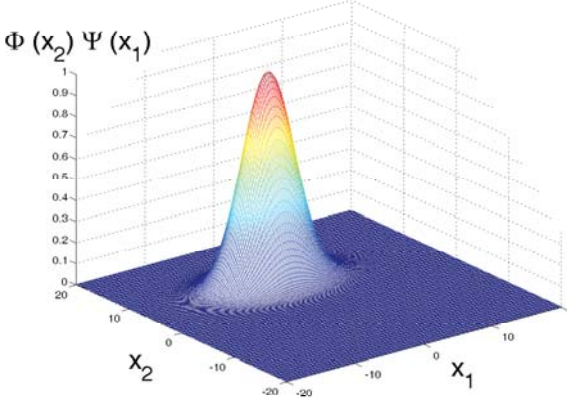
Peki, birbiriyle aynı iki elektronun dalga durumları için bu iki matematiksel olasılıktan hangisi, doğada gerçekten var olan durum?

Buna karar vermek için, bu iki hipotezi, iki elektronun dalga durumlarını birleştiren f_- ve f_+ kurallarından hangisinin geçerli olduğunu deneyle sınamamızı sağlayacak bir öngörü lazım. Elektronlar için doğru kuralın f_- olduğunu farz edelim. Bu demek ki *iki elektronu aynı dalga durumuna koyamayız*: Eğer Φ ile Ψ aynıysa, sonuç:

$$f_-(x_1, x_2) = \Phi(x_1)\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\Phi(x_2) = 0$$

Demek ki, f_- dalga kombinasyonu doğada geçerliyse o zaman: *İki elektron asla aynı durumda olamaz.* Buna, ***Pauli dışlama ilkesi*** deniyor.

Kimyanın ve atom fiziğinin bize deneylerle gösterdiğine göre, gerçekten de hiçbir atomda, tıpatıp aynı durumda iki elektron yok. Atomların yapısı ve periyodik tablonun tamamı, Pauli dışlama ilkesinin elektronlar için doğru olduğunun



Şekil 32.5

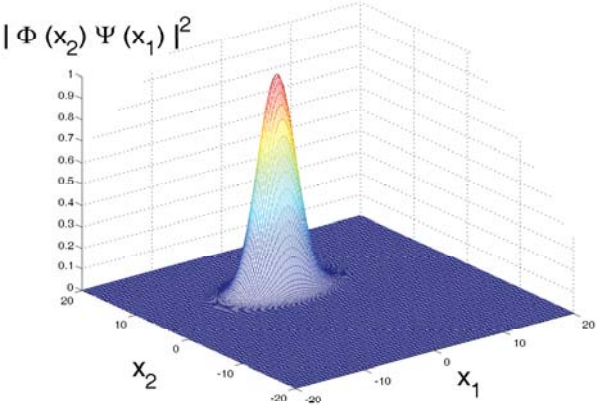
kanıtı. Demek ki iki elektronun dalga durumu için doğru olan '–' li seçenek:

$$f_{-}(x_1, x_2) = \Phi(x_1)\Psi(x_2) - \Psi(x_1)\Phi(x_2).$$

Pauli ilkesi protonlar ve nötronlar için de geçerli. Çekirdekte, tıpatıp aynı dalga durumuna sahip iki proton birden olmadığını, tamamen aynı dalga durumunda iki nötron da bulunmadığını görüyoruz.

Peki bütün parçacıklar Pauli ilkesine uyuyor mu? Tek parçacıklı dalga fonksiyonlarını birleştirip iki parçacıklı dalga fonksiyonları elde ederken hep f_{-} kuralı mı var?

Doğada pek çok parçacık da f_{+} kuralına uyuyor. Bunun en önemli örneği foton. Diğer bir örnek de, mezon denen bir tür çekirdekaltı temel parçacık. f_{+} kuralına uyan parçacıklar, Pauli ilkesinin söylediği özelliğin tam tersine sahip. f_{-} parçacıklar için Pauli ilkesi, belli bir durumda zaten bir parçacık varsa ikinci bir parçacığın aynı duruma gelemeyeceğini söylüyor. f_{+} kuralı ise bunun tam tersini söylüyor: Eğer belli bir durumda f_{+} kuralına uyan türden parçacık zaten mevcutsa, sisteme giren ikinci bir parçacığın da yine aynı duruma gelmesi daha olası. Eğer zaten aynı durumda (aynı frekansta, aynı dalga boyunda olan, aynı yönde hareket eden, aynı *kutuplanmada*) olan birçok foton varsa, atomların aynı duruma daha da çok foton yayması kuvvetle muhtemel. Buna *lazer** ilkesi deniyor. f_{+} kuralının diğer sonuçları, *Bose-Einstein yoğuşması, süperakışkanlık* ve *süperiletkenlik*. f_{-} kuralına uyan



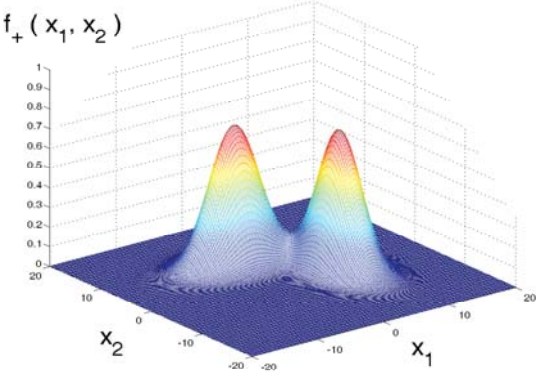
Şekil 32.6

* İngilizce *laser*'den gelen "lazer" kelimesi aslında, "uyarılmış radyasyon yayılımı ile ışık güçlendirme" anlamına gelen *Light Amplification by the Stimulated Emission of Radiation* kelimelerinin kısaltmasıdır.

parçacıklara, İtalyan fizikçi Enrico Fermi'nin adından *fermiyon* deniyor. f_+ kuralına uyan parçacıklara da, Hintli fizikçi Satyendranath Bose'nin adından *bozon* deniyor. Bir parçacık türünün bozon mu yoksa fermiyon mu olduğunu, parçacığın açısal momentumu belirliyor. Deneyler, enerji gibi açısal momentumun da kuantumlandığını gösteriyor: Bir parçacığın açısal hızı ya $\hbar$'ın bir tamsayı katı, 0, $\hbar$, $2\hbar$, $3\hbar$, ... gibi; ya da yarıtam sayı katı, $\hbar/2$, $3\hbar/2$, $5\hbar/2$, ... gibi olabilir. Temel parçacıkların kendilerine özgü bir *"iç" açısal momentum* özelliği var: *spin (dönü)*. Elektron, proton ve nötronun spin değerleri $\hbar/2$. Bunlar $\hbar$ birimiyle "*yarım spinli*" parçacıklar. Fotonların spini $\hbar$; bunlar da "*tamsayı spinli*" nesneler. Atom gibi birden fazla parçacıktan oluşan sistemlerde toplam açısal momentum, yörüngesel açısal momentumların ve atomu oluşturan parçacıkların spinlerinin toplamını içeriyor. Atomun türüne göre toplam spin yarım da tam da olabilir.

> Yarı tamsayılı açısal momentum değerlerine sahip parçacıklar veya parçacık sistemleri fermiyonlardır. f_- kuralına, Pauli dışlama ilkesine uyarlar.
>
> Tamsayılı açısal momentum değerlerine sahip parçacıklar veya parçacık sistemleri bozonlardır. f_+ kuralına uyarlar, hepsi aynı duruma geçmek ister.

PROBLEMLER



Şekil 32.7

1. Kutudaki parçacık (kuantum kutusu) problemleri için olası dalga fonksiyonları, $\psi_n(x) = (2/L)^{1/2} \sin(n\pi x/L)$; burada L kutunun boyu, n de bir tamsayı.

(a) Kutuda 2 nötron var, biri $n = 3$ durumunda, öteki de $n = 4$ durumunda. Bu 2 nötron için iki parçacıklı dalga fonksiyonu $f(x_1, x_2)$ ne?

(b) Kutuda 2 foton var, biri $n = 1$ durumunda, öteki de $n = 5$ durumunda. Bu 2 foton için iki parçacıklı dalga fonksiyonu $f(x_1, x_2)$ ne?

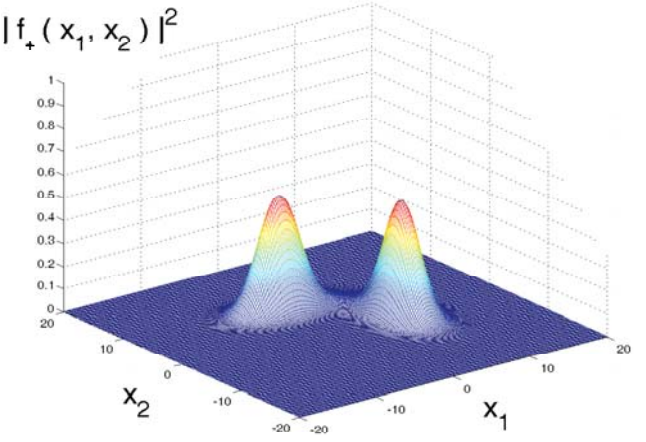
2. Kutudaki parçacık (kuantum kutusu) probleminde n'inci dalga durumundaki bir parçacığın enerjisi $E_n = \hbar^2 n^2 \pi^2/(2m\,L^2)$; burada L kutunun boyu.

   (a) Kutudaki 9 nötron için olabilecek en düşük toplam enerji ne kadar?

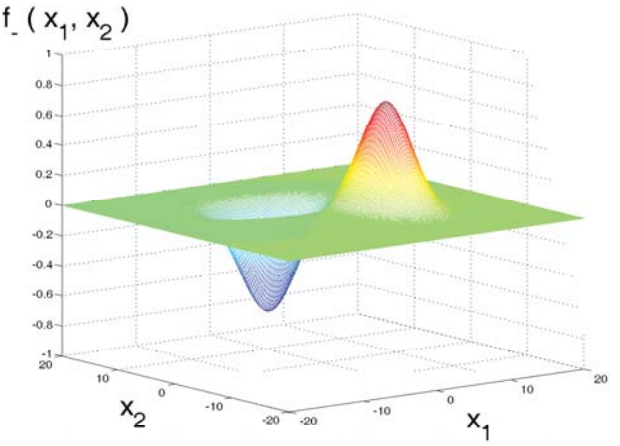
   (b) Kutudaki 9 foton için olabilecek en düşük toplam enerji ne kadar?

3. * Birbirine eş 3 fermiyon, ψ_1, ψ_2 ve ψ_3 dalga fonksiyonlarıyla tanımlanan dalga durumlarındalar. Bu 3 fermiyonun dalga fonksiyonu $f_-(x_1, x_2, x_3)$ ne?

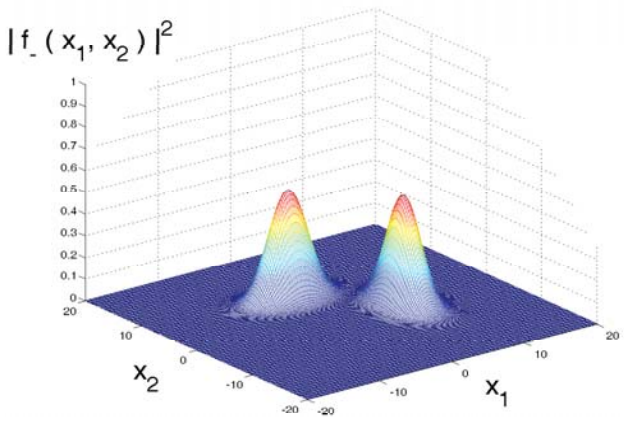
4. * Birbirine eş 3 bozon, ψ_1, ψ_2 ve ψ_3 dalga fonksiyonlarıyla tanımlanan dalga durumlarındalar. Bu 3 bozonun dalga fonksiyonu $f_+(x_1, x_2, x_3)$ ne?



Şekil 32.8



Şekil 32.9



Şekil 32.10

33
Atomik Elektronlar İçin Dalga Şekilleri

Bohr modelinde gördüğümüz gibi, bir elektronun atomun içinde dalga paketi olarak var olabilmesi, ancak belli birtakım ayrık enerji değerleriyle mümkün. Bu E_n enerji değerleri, ana kuantum sayısı denen birer tamsayı $n = 1, 2, 3, ...$ ile gösteriliyorlar. $n = 1$, enerjisi en az olan dalga durumu.

Üç boyutlu uzaydaki gerçek atomlarda, aynı E_n enerjiye sahip elektron dalga paketlerinin birbirinden farklı şekilleri ve yönelimleri olduğu görüldü. Bu dalga paketi çözümleri Schrödinger Denkleminden elde ediliyor. Farklılıklar, elektron dalga paketinin (bulutun) sahip olduğu dönüş miktarıyla (açısal momentumla) ilişkili. Bu l ile gösteriliyor, adı da açısal momentum kuantum sayısı. Ana kuantum sayısı n için, farklı şekillerdeki elektron dalga paketlerine (bulutlar, orbitaller) karşılık gelen birkaç l değeri mümkün. Bu farklı olasılıklar, $l = 0, 1, 2, ..., n-1$'dir. $l = 0$ dalga paketleri, çekirdeğe göre küresel olarak simetrik olur; sıfır açısal momentum, sıfır dönüş için dalga paketinin biçiminde bir yamulma yoktur. l değeri ne kadar yüksek olursa dalga paketi de o kadar eğri büğrü olur.

Dalga paketinin üç boyutlu uzaydaki şekilleri ve yönelimleri konusunda, her l değeri için birbirinden ayrı birkaç farklı olasılık var. Bu yönelimler de bir m kuantum sayısıyla gösteriliyor. Her l için, birbirinden farklı $2l + 1$ tane olası dalga paketi yönelimi var; $m = l, l - 1, ..., 2, 1, 0, -1, -2, ..., -l$.

$l = 0$, $m = 0$ için, yani küresel bir şekil için dalganın yönelimi sadece bir şekilde olabilir. $l = 0$ durumlarına s orbitalleri de denir.

$l = 1$ için 3 olasılık var, $m = 1, 0$ veya -1, çünkü $l = 1$ dalga paketleri bir eksene göre simetrik şekiller ve bu dalga paketlerini uzayda yönlendirmenin üç ayrı yolu var; mesela x ya da y ya da z eksenleri boyunca yönlenebilirler. $l = 1$ dalga paketlerine p orbitalleri de denir.

$l = 2$ için 5 olasılık var: $m = 2, 1, 0, -1$ veya -2. $l = 2$ dalga paketlerine d orbitalleri de denir.

Yalnızca ayrık l, m dalga şekillerinin mümkün olmasının nedeni, yalnızca belli E_n enerjilerin mümkün olmasının nedeniyle aynı: Elektronlar dalgadır ve dal-

galların atomun çekim potansiyel enerji kuyusuna sığması için belli şartlar lazım. Herhangi bir sisteme, sadece sistemin boyutlarına göre özel dalga boyları ve dalga şekilleri uyar. Bohr'un dalga boylarını bir yörüngeye oturtma şartını uygulayarak, hidrojen atomunun seçilmiş E_n ve r_n değerlerini Bohr modelinden doğru bir şekilde elde ettik. Hidrojen atomunun 3 boyutta taşıyabileceği *n, l, m* kuantum sayıları ile etiketlenen çeşitli elektron dalga paketlerini elde etmek için Schrödinger Dalga Denklemini çözmek gerek. Diğer atomlar için de, yine Schrödinger Denklemini çözmek gerek. Bu derste atomlardaki dalga şekilleri için bunu yapmayacağız, fakat bunun fiziksel nedenini, elektronların dalga özelliklerinin doğal bir sonucu olarak ancak *belirli dalga şekillerinin atoma sığabileceğini* anlıyoruz.

Elektronun *spin* denen bir özelliği daha var; elektronun özünde olan bir açısal momentum gibi, veya elektronun içinde ufacık bir mıknatıs taşıması gibi bir şey bu. Deneyler bir elektron spininin sadece iki değerde olabileceğini gösteriyor, bu değerler $\hbar$ biriminde $+1/2$ veya $-1/2$. Birbirinden ayrı bu iki olasılık bazen "yukarı" ve "aşağı" diye adlandırılır ve yukarı ya da aşağı bakan küçük oklarla gösterilir.

Belli bir n için, aynı enerjiye sahip kaç farklı dalga paketi ve spin durumu var? $l = 0$'dan $l = n - 1$'e kadar bütün l değerleri için, her l için kaç tane farklı m varsa bunları, $2l + 1$ tane birbirinden farklı m değerini sayın. Bu saymanın sonucu toplam n^2 tane farklı m değeri mümkün. Sonra, mümkün olan her dalga durumu için elektronun iki türlü spin olasılığı var. O halde E_n enerjisindeki elektronlar için $2n^2$ çeşit birbirinden farklı dalga paketi ve spin durumu mümkün.

Kuantum Sayısı	**Değerler**	**Aralık**	**Notlar**
n	1,2,3,...	$n \geq 1$	
l	0,1,2,...,$n-1$	$0 \leq l \leq n-1$	$l = 0:$ s orbitali $l = 1:$ p orbitali $l = 2:$ d orbitali
m	$-l, ..., -1, 0, 1, ..., l-1, l$	$-l \leq m \leq l$	

Tablo 33.1: Kuantum Sayılarının Özeti

Şimdi Z tane elektrona sahip bir atom düşünün. Bu atomlardan oluşmuş bir ortamda eğer sıcaklık çok yüksek değilse sürekli birbirleriyle ve fotonlarla enerji alıp veren atomların çoğunluğu olabilecek en düşük enerji seviyesinde bulunur, atomların ortalama enerjisini belirleyen sıcaklığa bağlı olarak hesaplanabilen belli sayılarda atom da uyarılmış durumda, daha yüksek enerji seviyelerinde bulunurlar. Atomun en düşük enerji seviyesindeki durumunu anlamak, maddenin birçok

özelliğini, her elementin kimyasal özelliklerini ve periyodik tabloyu anlayabilmek için başlangıç noktamızdır. Pauli ilkesi olmasaydı, atomun en düşük toplam enerji durumu, Z tane elektronun hepsinin, tek bir elektron için mümkün olan en düşük E_1 enerjisine sahip olması olurdu. Gelgelelim Pauli ilkesi aynı dalga paketi ve spin durumunda birden fazla elektron bulunmasına izin vermiyor. E_1 enerjili $n = 1$ durumunda sadece 2 elektron olabilir. Toplam enerjinin olabildiğince düşük olması için $n = 1$ durumunda 2 elektron olur; bir sonraki en düşük enerji durumu E_2, $n = 2$ de alabildiği kadar elektron, $2n^2 = 8$ elektron alır; Z tane elektronun hepsi de mümkün olan en düşük enerji durumlarına yerleşene kadar bu böyle gider. Belli bir n için, daha düşük l değerlerinin aslında birazcık daha az enerjileri var, dolayısıyla yerleşme $l = 0$ durumlarından, *s durumlarından* başlıyor, sonra $l = 1$'e, *p durumlarına* geçiyor, ardından $l = 2$, *d durumları* geliyor, vb.

Azot ($Z = 7$) için bu dağılım $1s^2\ 2s^2\ 2p^3$. Bu gösterimin anlamı şu: $n = 1$, $l = 0$ durumunda (s) 2 elektron var, $n = 2$, $l = 0$ durumunda (s) 2 elektron var ve geri kalan 3 elektron da $n = 2$, $l = 1$ durumuna (p) yerleşiyor.

n	1	2				3								
l	0	0	1			0	1			2				
m	0	0	-1	0	1	0	-1	0	1	-2	-1	0	1	2
N_{e^-} $(= 2n^2)$	2	8				18								
e^-	$1s^2$	$2s^2\ 2p^6$				$3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}$								

Tablo 33.2: $n = 1, 2, 3$ için mümkün n ve l değerleri, toplam elektron sayıları ve elektron dağılımları.

Birbirleri ile etkileşen çok sayıda elektronun bulunduğu atomlarda n, l durumlarının enerji sıraları değişebilir. Mesela $4s$ enerji seviyelerinin enerjisi $3d$'den daha az. Bütün bunları dikkate almak ve Pauli ilkesine uyarak en düşük enerjili dalga durumundan başlayıp mevcut enerji seviyelerini doldurarak ilerlemek, **periyodik tablo** yapısını anlatıyor.

Her elementin kimyasal özelliklerini en yüksek enerji kabuğundaki (en yüksek n) elektronların sayısı belirliyor, çünkü bu elektronlar, en az enerji verilerek atomdan ayrılması en kolay olan elektronlar. Bunun gibi, en son kabuktaki boş yerlerin sayısı da (atomun başka atomlardan kaç tane daha elektron alabileceği) atomun kimyasal özelliklerini belirlemede rol oynuyor. Enerji seviyelerini Pauli ilkesi uyarınca doldurma biçimleri, Z tane elektronu olan her atomun özelliklerini belirliyor. İşte bu yüzden, periyodik tablonun kendisi, Pauli ilkesinin deneydeki ispatıdır.

Son olarak, dikkat ederseniz, enerji değerleri ve her bir enerji değeri için olabilecek farklı dalga paketlerinin (*n, l, m* düzenlemelerinin) sayısı, elektron (ya da proton veya nötron yahut Pauli ilkesine uyan diğer parçacıklar) içeren her sistemde birbirinden farklı. Fakat Pauli ilkesinin uygulanması aynı: Önce o sistemdeki tek bir elektronun $n = 1, 2, 3, \ldots$ için alabileceği olası bütün enerji değerlerini listeleyin. Bu değerler ve bunların n'ye bağlılıkları her sistemde birbirinden farklı. Sonra, her bir n için kaç çeşit dalga durumu $d(n)$ olduğunu bulun. Sonra da $n = 1$'den başlayarak her enerji seviyesine $2d(n)$ tane elektron yerleştirerek, sistemdeki elektronların toplam sayısı N'nin tamamı yerleşene kadar devam edin. (Atomlar için, $d(n) = n^2$.)

PROBLEMLER

1. Flor atomunun 9 elektronunun, en düşük toplam enerji durumunda (temel seviyede) *n, l, m* ve spin *s* durumları arasındaki dağılımı nedir?
2. Neon atomunun 10 elektronunun temel seviyede *n, l, m* ve spin *s* durumları arasındaki dağılımı nedir?
3. Sodyum atomunun 11 elektronunun temel seviyede *n, l, m* ve spin *s* durumları arasındaki dağılımı nedir?
4. Demir atomunun 26 elektronunun temel seviyede *n, l, m* ve spin *s* durumları arasındaki dağılımı nedir?

34

Ek Sorular — Kuantum Fiziği

1. m kütleli bir parçacık $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ harmonik osilatör potansiyelinde hareket ediyor.

   (a) Belirsizlik İlkesini kullanarak kinetik enerjiyi x cinsinden ifade edin.

   (b) Hangi x değerinde toplam enerji minimum olur?

   (c) Enerjinin minimum değeri k ve m cinsinden nedir?

   (d) (c)'de bulduğunuz minimum enerjiyi harmonik osilatörün açısal frekansı ω cinsinden ifade edin.

2. Bir moleküldeki bir elektronun potansiyel enerjisi $U(x) = Cx^4$, burada x denge konumundan uzaklığı ifade ediyor. Belirsizlik ilkesi $\Delta p \Delta x \sim \hbar/2$'yi kullanarak aşağıdakileri bulun:

   (a) x'in bir fonksiyonu olarak, elektronun toplam enerjisi.

   (b) Elektronun toplam enerjisinin minimum olduğu x değeri.

   (c) Toplam enerjinin minimum değeri.

   (d) Toplam enerji minimum iken kinetik enerji miktarı.

   (e) Toplam enerji minimum iken potansiyel enerji miktarı.

3. Tek boyutta, g kütleçekimi alanında aynı kütleye $m_1 = m_2 = m$ sahip iki parçacık bir harmonik potansiyelle etkileşime giriyorlar, öyle ki sistemin toplam enerjisi

$$E = \frac{p_1^2}{2m} + mgx_1 + \frac{p_2^2}{2m} + mgx_2 + \frac{1}{4}m\omega^2(x_1 - x_2)^2.$$

   Parçacıklar $x_1 > 0$ ve $x_2 > 0$ olacak şekilde katı bir yüzey üzerinde hareket etmeye mecburlar (Şekil 34.1).

   (a) Toplam mekanik enerjinin

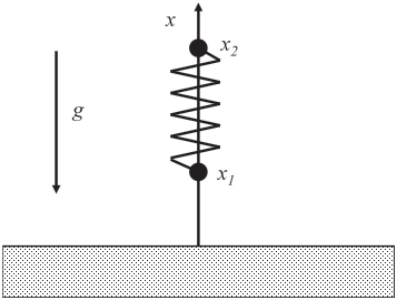
$$E = \frac{P^2}{2M} + MgX + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$$

şeklinde yeniden yazılabileceğini gösterin. Burada $M = 2m$ toplam kütledir, $\mu = m/2$'ye ise indirgenmiş kütle deniyor. $X = (x_1 + x_2)/2$ kütle merkezinin konumu ve $x = x_1 - x_2$ de göreli koordinat. Bunlara karşılık gelen momentumlar sırasıyla $P = M\frac{dX}{dt} = p_1 + p_2$ ve $p = \mu\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$.

(b) Kütle merkezi koordinatı X ile göreli koordinat x birbirinden bağımsızdır. Belirsizlik ilkesini

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar/2$$

kullanarak, $E_X = \frac{P^2}{2M} + MgX$ ve $E_x = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$'nin mümkün olan en düşük değerlerini hesaplayın ve taban durumu enerjisi $E = E_X + E_x$'i bulun.



Şekil 34.1

4. m kütleli bir parçacık, Şekil 34.2'de görüldüğü gibi L uzunluğunda tek boyutlu bir kutuya kısılmış. Kutunun içinde, $0 < x < L$'de potansiyel enerji $U(x) = 0$, kutunun dışında ise çok büyük ("sonsuz"), öyle ki parçacığın kutunun dışında olması hiç mümkün değil.

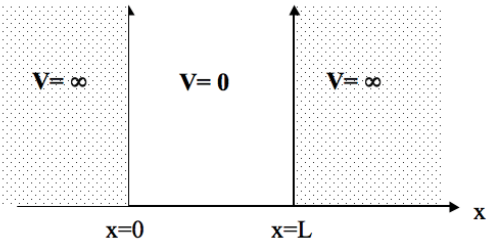
   (a) Parçacığın dalga fonksiyonunu uçları sabit olan bir sinüs dalgası şeklinde düşünerek, bu problemde mümkün olan λ_n dalga boylarını bulun.

   (b) De Broglie Bağıntısı $\lambda_n = h/p_n$'yi kullanarak olası momentumları bulun.

   (c) $E_n = p_n^2/2m$'yi kullanarak olası enerjileri bulun.

   (d) Parçacık $n = 4$ seviyesinden $n = 2$ seviyesine düşerken çıkan fotonun frekansı nedir?

   (e) Pauli dışlama ilkesinden faydalanarak bu potansiyele yerleştirilen üç elektronun toplam enerjisini bulun.



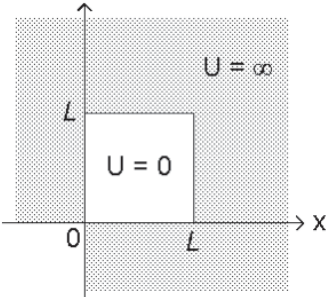
Şekil 34.2

5. *Li*++ (lityum) iyonu, +3*e* yüklü bir çekirdekten ve bir elektrondan oluşuyor.
   (a) Elektronun *r* yarıçaplı dairesel bir yörüngede olduğunu varsayarak ve elektrostatik kuvveti

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3e^2}{r^2}.$$

   kullanarak hareket denklemi $F = ma$'yı yazın.
   (b) Elektronun dalga boyu λ ile yörüngenin yarıçapı *r* arasındaki ilişki için Bohr Önermesini yazın. Bunu, de Broglie Bağıntısı $\lambda = h/mv$'yi kullanarak elektron hızı ile yörüngenin yarıçapı arasında bir ilişki olarak ifade edin.
   (c) (a) ve (b)'den çıkan iki denklemi çözün ve *r* değerlerini bulun.
   (d) *Li*++ iyonunun olası enerji değerleri nelerdir?

6. Bir elektron, kenarları *L* uzunluğunda olan iki boyutlu bir kare kutuya kısılmış. $0 < x < L$ ve $0 < y < L$ için, kutunun içinde, potansiyel enerji $U(x) = 0$. Kutunun dışında potansiyel enerji çok yüksek ("sonsuz"), öyle ki elektronun kutunun dışında olması hiç mümkün değil (Şekil 34.3).
   (a) Parçacığın dalga fonksiyonları sinüs dalgaları, $\psi(x, y) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y)$.



Şekil 34.3

$x = L$ ya da $y = L$ olduğunda $\psi = 0$ olmasından faydalanarak, bu problemde mümkün olan dalga sayıları k_x, k_y'yi bulun.

(b) İki boyutlu kutunun dalga vektörünü $\mathbf{k} = k_x\mathbf{i} + k_y\mathbf{j}$ ilişkisi veriyor. Elektronun olası enerjileri $E = \hbar^2k^2/2m$'yi, k_x ve k_y cinsinden bulun.

(c) Olası her dalga (k_x , k_y) için iki spin durumu var. En düşük üç enerji seviyesinin her birine kaç farklı elektron durumu karşılık geliyor?

(d) Bu kare kutuya 7 elektron konuyor. Pauli dışlama ilkesini kullanarak sistemin olası en düşük toplam enerjisini bulun.

7. m kütleli bir parçacık, $U(x) = Ax^6$ potansiyel enerjisinde hareket ediyor, A bir sabit.

(a) Toplam enerjiyi yalnızca x üzerinden ifade edin, bunun için belirsizlik ilkesini ($\Delta p\Delta x \approx \hbar$) kullanın.

(b) Toplam enerjinin minimum olduğu x değerini bulun.

(c) Enerjinin minimum değerini bulun.

8. m kütleli bir parçacık r yarıçaplı dairesel bir yörüngede hareket ediyor. Parçacığın potansiyel enerjisi $U(r) = Cr^3$; C bir sabit.

(a) Bu potansiyel enerjiye karşılık gelen kuvveti bulun.

(b) Bu potansiyel enerji için Bohr modelinin iki denklemini yazın.

(c) Yörüngenin yarıçapı r'nin alabileceği değerleri bulun.

(d) Toplam enerjinin alabileceği değerleri bulun.

9. Müon, yükü elektronla aynı, $-e$ olup, kütlesi elektronun kütlesinin yaklaşık 200 katı $m_\mu \cong 200m_e$ olan bir temel parçacık. Bir müon, bir proton tarafından yakalanarak "müonik atom" oluşturabilir. $n = 1, 2, 3...$ iken Bohr Önermesi $2\pi r = n\lambda = nh/mv$'yi kullanarak,

(a) Müonik atom için Bohr yarıçapları r_n'yi kütle m_μ, yük e ve temel sabitler cinsinden bulun.

(b) Olası enerji seviyelerini m_μ, e ve temel sabitler cinsinden bulun.

(c) Müonik atom $n = 3$'ten $n = 2$ enerji seviyesine geçiş yaparken çıkan fotonun enerjisini ve frekansını taban durumu enerjisi E_1 cinsinden bulun.

10. Bir çekirdekteki nötronun, çekirdeğin merkezine olan mesafesi r'nin fonksiyonu olarak potansiyel enerjisi yaklaşık olarak $U(r) = \frac{1}{2}Kr^2$.

(a) Belirsizlik ilkesini kullanarak enerjinin minimum olduğu yarıçapı bulun.

(b) Nötronun minimum enerjisi $E_{\min}$ nedir?

(c) Tek boyutlu bir harmonik osilatörün birinci uyarılmış hal enerjisi, en düşük

enerjinin 3 katı, $E_2 = 3E_1$'dir. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ olduğuna göre nötronun olası en düşük üç enerjisi, minimum enerji $E_{\min}$ cinsinden ne kadardır?

(d) Bu en düşük 3 enerji seviyesinin her birinde eş enerjili kaç farklı durum vardır? (Eş enerjili durumlar, fiziksel olarak birbirinden farklı olup aynı enerjiye sahip olan durumlardır.

(e) Nötronların iki spin durumu var ve Pauli ilkesine uyuyorlar. Bu çekirdeğe konan 8 nötronun minimum toplam enerjisi, $E_{\min}$ cinsinden ne kadardır?

11. m kütleli bir nötron, çekirdekte bağlı haldedir. Çekirdeğin merkezine olan mesafe r üzerinden, potansiyel enerji $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Nötronun açısal momentumu sıfır, hareketi tamamıyla radyal yönde. Belirsizlik ilkesi $p_r \geq \hbar/r$'yi kullanarak, nötronun toplam enerjisini sadece r cinsinden ifade edin ve nötronun sahip olması gereken minimum enerjiyi bulun.

12. Her türlü $U(r)$ potansiyelinin enerji seviyelerini bulmak için Bohr modeli kullanılabilir. $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$ şeklindeki bir potansiyelle bağlı, m kütlesinde bir elektron olsun; r merkez noktadan (orijinden) olan mesafedir.

(a) Elektronun dairesel yörüngeleri için kuvveti bulun, hareket denklemini yazın.

(b) Bohr modeline göre olası yörünge yarıçapları r_n'yi bulun.

(c) Bohr modeline göre bu elektron için olası enerji seviyelerini bulun.

(d) Elektron, bir foton alarak, en düşük enerji seviyesinden, bir sonraki enerji seviyesine geçiş yapıyor. Fotonun enerjisi nedir?

(e) Fotonun frekansı nedir?

13. Bir ideal gazın N tane molekülü, V hacimli bir kabın içinde T sıcaklığında termal dengede.

(a) Ortalama kinetik enerjiyi bulun.

(b) Her molekülün kütlesi m ise, ortalama momentum *(p)* kaç?

(c) Ortalama de Broglie dalga boyu λ_{dB} kaç?

(d) Her parçacığın aslında yaklaşık değeri λ_{dB}^3 olan bir dalga paketi olduğunu farz ederek, dalga paketlerinin birbirine değmeye başladığı, klasik ideal gaz modelinin artık geçerli olmadığı T_c sıcaklığını bulun.

14. Bohr'un hidrojen atomu modeline göre olası elektron orbitinin yarıçapı

$$r_n = n^2 a_0.$$

Burada a_0 Bohr yarıçapı, $n = 1, 2, 3,...$

(a) Bohr Önermesini ve de Broglie Bağıntısını kullanarak, elektronun yörün-

gesel hızı v_n'yi a_0 cinsinden bulun.

(b) Bu olası yörüngelerde elektronun kinetik enerjisi, a_0 cinsinden kaçtır?

(c) Olası yörüngelerde elektronun toplam enerjisi, a_0 cinsinden kaçtır?

(d) Elektronun $n = 3$ durumundan $n = 1$ durumuna geçmesi halinde yayılacak fotonun frekansı nedir?

15. Bir hidrojen atomu düşünün: Çekirdekte 1 proton ve en düşük enerji yörüngesinde 1 elektron.

(a) Elektronun toplam enerjisini yazın.

(b) Belirsizlik ilkesini kullanarak toplam enerjiyi iki yük arasındaki mesafe r'nin bir fonksiyonu olarak ifade edin.

(c) r'nin bir fonksiyonu olarak toplam enerji $E(r)$'nin grafiğini çizin.

(d) Elektronunun minimum enerjisi E_{min}'i hesaplayın.

(e) r_{min}'in (iki yükün arasındaki, elektronun toplam enerjisinin minimum olduğu mesafe) fiziksel önemi nedir?

16. He^+ (helyum) iyonu, $+2e$ yüklü bir çekirdek ile 1 elektrondan oluşuyor.

(a) Elektronun r yarıçaplı dairesel bir yörüngesi olduğunu varsayarak ve elektrostatik kuvveti

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$$

kullanarak, hareket denklemi $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$'yı yazın.

(b) Elektron dalga boyu λ ile yörüngenin yarıçapı r arasındaki ilişki için Bohr Önermesini yazın. De Broglie Bağıntısı $\lambda = h/mv$'yi kullanarak bunu elektron hızı ile yörünge yarıçapı arasında bir ilişki olarak ifade edin.

(c) (a) ve (b)'den çıkan denklemleri çözerek olası yörünge yarıçapı r_n değerlerini bulun.

(d) He^+ iyonunun olası enerji değerleri E_n nedir?

17. m kütleli bir parçacık, Şekil 34.2'de görüldüğü gibi, L uzunluğunda tek boyutlu bir kutuya kısılmış. Kutunun içinde potansiyel enerji 0 ($0 < x < L$'de $V(x) = 0$), kutunun dışında ise çok büyük (sonsuz) böylece parçacığın kutunun dışında olması hiç mümkün değil.

(a) Parçacığın dalga fonksiyonunu iki uçtaki değerleri 0 olan bir sinüs dalgası olarak düşünerek bu problemde olabilecek λ_n dalgaboylarını bulun.

(b) De Broglie Bağıntısını $\lambda_n = h/p_n$ kullanarak, olabilecek momentumları bulun.

(c) Olabilecek enerjileri E_n bulun.

(d) Parçacık $n = 5$ seviyesinden $n = 2$ seviyesine düşerken yayılan fotonun frekansı nedir?

(e) Bu potansiyele yerleşen üç elektronun en düşük toplam enerjisini bulun.

18. Çekirdekteki proton için Bohr modeli: Bir proton bir çekirdeğin içinde hareket eder. Potansiyel enerji $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Burada r çekirdeğin merkezinden olan uzaklık.

(a) Protonun üzerindeki kuvvetin büyüklüğü ve yönü nedir?

(b) Protonun r yarıçaplı dairesel bir yörünge üzerinde olduğunu varsayarak $F = ma$ hareket denklemini yazın.

(c) Bohr Önermesini proton dalga boyu λ ile yörüngenin çevresi arasında bir ilişki olarak yazın. De Broglie Bağıntısını $\lambda = \frac{h}{mv}$ olarak yerine koyup Bohr Önermesini hız v ve yarıçap r cinsinden kurun.

(d) r'nin değerlerini bulmak için (b) ve (c)'de elde ettiğiniz iki denklemi çözün.

(e) Olası enerji değerleri nelerdir?

19. m kütleli bir elektron bir molekülde osilasyon yapıyor. Potansiyel enerji $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ olarak veriliyor, burada ω osilasyon frekansı.

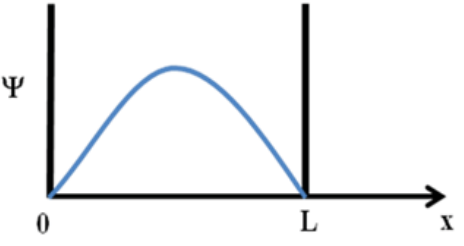
(a) Belirsizlik ilişkisini kullanarak toplam enerjiyi x cinsinden ifade edin.

(b) Hangi $E(x)$ değerinde enerji minimum olur?

(c) Enerjinin minimum değeri nedir?

20. (a) Aynı süratle hareket eden bir elektron ve bir nötron düşünelim. Hangi parçacığın dalga boyu daha kısadır? Kısaca açıklayın.

(b) L uzunluğunda bir kutuda tutulan bir parçacığın dalga fonksiyonu Şekil 34.4'de gösterildiği gibi. Hangi noktada parçacığın bulunma olasılığı en yüksektir? Neden?



Şekil 34.4

21. Kütlesi m olan bir parçacık $U(x) = Ax^3$ şeklinde bir potansiyel enerjiye sahip; burada A bir sabit x ise parçacığın denge konumundan uzaklığını gösteriyor. Belirsizlik ilkesini ($\Delta p \Delta x \sim \hbar/2$) kullanarak:
    (a) Parçacığın toplam enerjisini sadece x cinsinden yazın.
    (b) x'in hangi değeri için toplam enerji minimumdur?
    (c) (b)'deki cevabınızı kullanarak toplam enerjinin alabileceği minimum değeri hesaplayın.
    (d) En düşük enerjinin kesin değerini dalga fonksiyonuyla birlikte nasıl bulursunuz? Çözüm yapmaya çalışmayın.

22. (a) Si (silikon) atomunun en düşük toplam enerjili durumunda bu atomun 14 elektronunun çeşitli n, l, m ve spin s durumlarına dağılımı nasıldır?
    (b) Kutudaki parçacık probleminde mümkün enerji seviyeleri $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/(2mL^2)$ şeklinde. Burada m parçacığın kütlesi, L de kutunun uzunluğu. Kutuda 3 tane W+ bozonu olduğunda toplam enerjinin minimum değerini , L ve mW cinsinden bulun.

    (c) Başlangıçta negatif elektrik yükü taşıyan bir elektrotun metal topu üzerine morötesi ışınım huzmesi düşüyor. Metal topun negatif yükü boşalır mı yoksa daha da negatif hale mi gelir? Morötesi ışınım huzmesini elektrota göndermeye devam ederseniz sonunda elektrotun yükü pozitif mi yoksa negatif mi olur? Açıklayın.

Dizin

açısal frekans (radyan frekans) 125
açısal hız (radyan hız) 66
açısal momentum 107, 127, 281
açısal momentumun korunumu 95
ağırlık 77
akı 46, 201
akışkanlar mekaniği 26
Ampère, André-Marie 206, 207
Ampère Kanunu 208, 224
Anderson, P. W. 10
Angström 282
anlamlı basamak sayısı 31
antinötrino 178
Aristoteles 70
aşkın sayılar 31
atom 281
atom çekirdeği 179
Avogadro sayısı 24

bağlanma sabiti 34
Batlamyus 70
belirsizlik ilişkisi 307
belirsizlik ilkesi 287
Biot-Savart integrali 211
Biot-Savart Kuralı 210
Bohr, Niels 11, 283, 284, 290
Bohr önermesi 286, 307
Bohr yarıçapı 284
Boltzmann, Ludwig 10, 170
Boltzmann sabiti 170
Born, Max 294
Bose-Einstein yoğuşması 319
Bose, Satyendranath 320
boşluğun geçirgenliği 208
Boyle, Robert 162
bozon 320
Brahe, Tycho 129, 132
Broglie Bağıntısı 297
büyüklük mertebesi 31
Büyük Patlama 24, 25, 45

CERN 178
Charles, Jacques 162
Charles Kanunu 163
Coulomb Kanunu 186, 210
Coulomb kuvveti 97

çapraz çarpım (vektörel çarpım) 41
çarpışma 90
ç çarpım 38
çiftyıldız 281, 282

dağılma 290
dağılma ilişkisi 292
dalga boyu 236, 239
dalga fonksiyonu 291
dalga paketi 292
dalga-parçacık ikiliği 285, 290
Darwin, Charles 17, 20, 206
de Broglie Bağıntısı 293
deplasman akımı 224
dolanma 209, 210, 214
d orbitalleri 323
dönü 219

eğik atış 62
Einstein, Albert 17, 20, 21, 280, 283, 290, 301
elektrik alan çizgileri 184
elektrik dipol 183
elektromanyetik ışıma 292
elektromanyetizma 301, 310

elektromotor kuvveti 276
elektron 179, 281, 311
elektrostatik kuvvet 178
empedans 244
Enerjinin Korunumu Kanunu 95, 98
entropi 170
ermodinamik denge 168
esîr (eter) 290
esnek çarpışma 106
eş enerjili durum 331
evrensel gaz sabiti 175
evrensel kütleçekimi kuvveti 77
evrensel kütleçekimi sabiti 77
evrim teorisi 17
Eylemsizlik (Atalet) Kanununa 72

Farad 203, 267
Faraday Kanunu 224, 227
Faraday, Michael 203, 206, 227
Fermi, Enrico 320
fermiyon 320
ferromanyetik maddeler 206
Feynman, Richard 10, 28
fotoelektrik etki 290
foton 179, 285, 293, 311
frenleme 76, 82, 245

Galileo Galilei 15, 17, 28, 72, 73, 117
Galileo hız dönüşümü 20
Galileo hız kuralı 21
Gauss Kanunu 186, 191
Geiger, Hans 281
genel görelilik 45
Gilbert, William 206
girişim 290
Görelilik Teorisi 20
gradyan 97
Gribbin, John 9
güçlü (yeğin) nükleer kuvvet 178

Harvey, William 24
hassasiyet derecesi 31
hata çubukları 30
Heisenberg belirsizlik ilkesi 306
Henry, Joseph 229
Hertz 239
hız 66, 72, 73
Hooke Kanunu 119, 121
Hume, David 16

ısı transferi 99, 172

ideal gaz 160
ince yapı sabiti 301
İnce yapı sabiti 35
indirgemecilik 24
indirgenmiş kütle 328
indüksiyon elektromotor kuvveti 228
indüksiyon voltajı 228
indüktans 229, 244
indüktör 244
irrasyonel (oransız) sayılar 31
iş-enerji teoremi 96
ivme 72, 73, 74
iyon 179

kahverengi cüce 25
kalkülüs 15, 72, 73
kapasitans 243, 244, 267
kapasitör 202
karacisim ışıması 285
kara cisim ışıması spektrumu 290
karadelik 25
karanlık enerji 25
karanlık madde 25
kararlı denge noktaları 103
kararsızlık 104
Kepler'in İkinci Kanunu 129
Kepler'in Üçüncü Kanunu 281

Kepler, Johannes 70, 129, 132
kısmi basınç 165
kinematik 48
kinetik enerji 96
korunumlu kuvvetler 97
kuantum elektrodinamiği 301
kuantum mekaniği 17, 45, 49, 281
kuarklar 179
kütle 72, 74
kütleçekimi 72, 178
kütleçekimi dalgaları 301

Leibniz, Gottfried 72
Lenz Yasası 228
Lorentz Kuvveti 212

manyetik dipol 218, 219
manyetik monopol 218
manyetizma 206
Marconi, Guglielmo 239
Marsden, Ernest 281
Maxwell Denklemleri 186
Maxwell, James Clerk 20, 21, 224
Maxwell Kanunları 200
merkezî kuvvetler 128
Michelson-Morley deneyi 21
momentum 72
momentumun korunumu 90
monopol 219

negatif geribesleme 104
nesnellik 15
Newton, Isaac 15, 20, 34, 70, 72, 73, 117, 132
Newton mekaniği 16
Newton'un Birinci Kanunu 72, 73
Newton'un İkinci Kanunu 30, 70, 73, 88
Newton'un Kütleçekimi Kanunu 45
Noether Teoremi 130
nokta çarpım 38
normal kuvvet 76
nötron 178
Nükleer Manyetik Rezonans (MR) 219

Ohm, Georg 246
oluşum 10, 25
osilasyon 229

ölçek 31
özel görelilik 280
özel görelilik teorisi 17

parçacık 289
Pascal, Blaise 161
Pauli dışlama ilkesi 318
periyodik tablo 325
Planck Bağıntısı 293
Planck Hipotezi 285
Planck, Max 283, 285, 290
Planck ölçekleriyle ilgili problemler 45
Planck sabiti 283, 285, 301
plazma 179
plazma frekansı 242
Popper, Karl 16
p orbitalleri 323
potansiyel enerji 97, 100, 104
Poynting vektörü 253
pozitif geribesleme 104
proton 178, 179

radyan frekans (açısal frekans) 125
radyan hız (açısal hız) 66
radyasyon 292
Reynolds sayısı 26

rezistans 244
rezonans 244
rezonant boşluk 244
rezonatör 244
Rutherford, Ernest 281
Rydberg 284

sarmal bobin 244
Schrödinger Dalga Denklemi 298, 299, 307, 324
serbest cisim diyagramı 75
sıcaklık 172
sığa 202, 243, 267
simetri 200
skaler çarpım 38
s orbitalleri 323
spin 219, 320, 324
süperakışkanlık 319
süperiletkenlik 319
süperpozisyon ilkesi 203, 210
sürat 66
sürtünme 72, 99
sürtünme (frenleme) kuvveti 82
sürülme akımı 224, 229

temas kuvveti 76
Termodinamik Kanunları 20, 24
Tesla, Nicola 212
Thomson, J. J. 281
tork 127
toroid 230

uzaktan etki eden kuvvetler 76

üstel fonksiyon 113

vektör 42
vektörel çarpım (çapraz çarpım) 41
viskozite 26
Volt 282
Volta, Alessandro 185
voltaj 100
Volta pili 282
vuru 314

Watt, James 247

yük 178
yüzey sürtünme kuvveti 76

zamana göre kısmi türev 223